توانا بود هر که دانا بود

وزارت فرهنگ

کتاب جبر

برای سال دوم دبیرستانها

بها در تمام کشور ۱۶ ریال

۱۳۲۴

بنگاه علمی

With the Compliments

of

The Cultural Counsellor

of

The Iranian Embassy

New Delhi.

فصل اول

حرفها و نشانه ها و دستورهای جبری

۱- در علم حساب عدد برای سنجش یک چندی (کمیت) است نسبت به یکه (واحد) آن چندی.
مثلاً هرگاه بگوئیم درازای فلان پارچه ۷ متر است عدد ۷ مینماید که این درازا برابر یکه
درازا یعنی متر است. و همچنین هرگاه بگوئیم وزن این روغن $۲\frac{۳}{۱۰}$ کیلو است عدد $۲\frac{۳}{۱۰}$ مینماید
که این وزن ۲ یکه و $\frac{۳}{۱۰}$ یکه وزن را دربردارد.

۲- چنانکه میدانیم در مسئله های حساب عددهائی مانند عددهای بالا (۷ و $۲\frac{۳}{۱۰}$) بکار
میرود. مانند مسئله زیر:

مزد کارگری در روز ۱۲ ریال است پس از ۵ روز چقدر باو میرسد؟

و نیز در بهره کاری (مرابحه) مسئله هائی در روی عددهای مختلف که نمایش سرمایه
و زمان و نرخ و سود است طرح میشود مانند مسئله زیر:

مطلوبست سود ۲۵۰ ریال سرمایه از قرار نرخ ۶٪ در مدت دو سال. که پس از نتیجه
مختصری نتیجه میشود:

$$\frac{۲۵۰ \times ۶ \times ۲}{۱۰۰} = ۳۰ \text{ ریال}$$

و میدانیم که این مسئله و مسئله های مانند آنرا بوسیلهٔ دستور

$$i = \frac{a \times r \times t}{۱۰۰} \qquad (۱)$$

حل میکردیم که در آن i بجای سود و a بجای سرمایه و r بجای نرخ و t بجای زمان گذشته شده و معنای آن این است:

سود مساوی است با سرمایه ضرب در نرخ ضرب در زمان تقسیم بر ۱۰۰

از روی این دستور نه تنها مسئله بالا را میتوان حل نمود بلکه هر مسئله ای که مانند آن باشد نیز از روی این دستور حل میشود چنانکه اگر سرمایه ۱۲۰ ریال و نرخ ۹٪ و زمان ۵ سال باشد از روی دستور (۱) سود چنین میشود

$$= \frac{a \times r \times t}{۱۰۰} = \frac{۱۲۰ \times ۹ \times ۵}{۱۰۰} = ۵۴ \text{ ریال}$$

در مسئلهٔ اول a مساوی ۲۵۰ و در مسئلهٔ دوم مساوی ۱۲۰ میباشد و در مسئله های دیگر ممکن است بجای سرمایه های دیگر بکار رود همچنین است حرفهای دیگر که در دستور (۱) بکار رفته بنابرین از بکار بردن حرفها در مسئله ها دستورهائی مانند دستور (۱) بدست میآید و از روی این دستورها که رابطه هائی هستند شامل حرف و عدد و نشانه (علامت) محاسبه ها ساده شده و مسئله ها باسانی حل میگردد.

مثال - میدانیم مساحت مستطیل مساوی حاصل ضرب قاعده و ارتفاع آنست - اگر اندازهٔ قاعده را از روی یکهٔ درازا (مثلاً سانتیمتر) به b و اندازهٔ ارتفاع را از روی همان یکه

b ها مساحت را بحسب یک مساحت مثلاً سانتیمتر مربع) به S بنمائیم این دستور $S=a\times b$ نتیجه میشود که از روی آن میتوان مساحت مستطیلی را بدست آورد.

۳- از آنچه گفته شد معلوم میشود هرگاه در مسئله ای بجای عددها حرف گذاشته شود آن مسئله صورت کلی پیدا میکند و از حل آن میتوان مسئله های زیادی مانند آن را حل نمود و منظور عمده علم جبر و مقابله نیز همین است یعنی **ساده نمودن محاسبه ها و عمومیت دادن بحل مسئله ها بوسیله بکار بردن حرفها و نشانه ها**

نشانه ها برای آسان نمودن حل مسئله و حرفها برای عمومیت دادن محاسبه ها بکار میروند.

۴- **حرفها** - بیشتر در جبر حرفهای اول الفبای لاتین (a و b و c وغیره) را برای نمایش چندیهای دانسته (معلوم) و حرفهای آخر را (x و y و z وغیره) برای نمایش چندیهای مجهول بکار میبرند.

وقتی که بخواهند چند مقدار را که شبیه هم باشند نمایش بدهند آنها را با یک حرف نموده اختلافشان را با نهادن زبری در بالای سمت راست و یا شماره ای در زیر کمی بسمت راست نمایش میدهند مثلاً مینویسند a' و a'' و a''' ... (بخوانید a زبر یک و a زبر دو وغیره) و یا a_1 و a_2 ... (بخوانید a زیر یک و a زیر دو وغیره).

۵- **نشانه ها** (علامت ها) - نشانه ها معلوم میکنند عملها یا رابطه هائی که باید بین عددها و حرفها برقرار باشد - مهمترین آنها از اینقرارند:

الف - نشانه های مخصوص چهار عمل اصلی - همان نشانه هائیست که در حساب

هم بکار میبرند.

+ علامت افزودن عددی بر عدد دیگر است مانند $a+b$ و $۲+۵$ و $c+۱۲$

− نمایش کاستن عددی از عدد دیگر است مانند $a-b$ و $۵-۲$ و $x-۱$

× مینماید که باید دو عدد در هم ضرب شوند مانند $a \times b$ و $۲\times d$

حاصل ضرب دو عدد a و b را چنین نیز نویسند $a \cdot b$ و یا ab

مانند $d \cdot x$ و xy

: یا ـ علامت تقسیم کردن عددی بر عدد دیگر است

مانند $a:b$ و یا $\frac{a}{b}$ و $\frac{x}{۳}$ و $\frac{۱۲}{y}$

ب ـ علامتهای مقایسه:

= نمایش مساوی بودن دو مقدار است مانند $a=b$ و $x=۲$

≠ علامت اختلاف دو مقدار است مانند

$y \neq ۵$ و $a+۱ \neq a+۲$ و $۴+۳ \neq ۱۰$

$>$ یا $<$ ـ برای اینکه بنویسند عددی کوچکتر از عدد دیگر یا بزرگتر از آنست علامت $>$ یا $<$ را بکار میبرند چنانکه $a>b$ یا $b<a$ هر دو مینماید که عدد a بزرگتر از b میباشد

مانند $۳<۷$ و $۹>۵$

$\geqslant$ یا $\leqslant$ این دو علامت را وقتی بکار میبریم که بخواهیم بنویسیم حداقل یا اکثر عددی مانند a مساوی عددی مانند b است مثلاً $a \geqslant b$ مینماید که عدد a بزرگتر از b و یا مساوی

کم مساوی با آن میباشد و همین رابطه مینماید که ط کوچکتر از ه و یا اگر ا مساوی با آنست

ج - پرانتزها - وقتی مقدارهائی با نشانه های چهار عمل اصلی در داخل پرانتز[1] ( ) یا گروشه[2] [ ] و یا آکلاد[3] { } قرار گرفته باشند حکم مقدار واحد پیدا میکنند و این پرانتزها حاصل تمام عملهای بین این مقدارها را مینمایند مثلاً (۳-۵)+ه مینماید که باید بر ه حاصل پرانتز یعنی ۲ را افزود.

یادآوری - برای حساب کردن هر عبارتی که در آن جمع و تفریق و ضرب و تقسیم باشد باید نخست عمل های ضرب و تقسیم را بترتیبی که نوشته شده انجام داده سپس جمع و تفریق نمود مثلاً

۲۷ - ۱۸ : ۶ × ۲ + ۵ × ۳ =

۲۷ - ۳ × ۲ + ۱۵ =

۲۷ - ۶ + ۱۵ = ۳۶

بنابرین عبارت ۷ + ۲ × ۸ - ۵ با (۷ + ۲) × (۸ - ۵) تفاوت کلی دارد چه

۷ + ۲ × ۸ - ۵ = ۷ + ۱۶ - ۵ = ۱۸

و (۷ + ۲) × (۸ - ۵) = ۹ × ۳ = ۲۷

تمرین - این عبارتها را حساب کنید

۴۸ : ۶ - ۴(۷ - ۲) : ۱۰ + ۵(۴ + ۳ × ۲)

٣٦ : ٤ : ٣ - ٢ (٥ - ٢) : ٦ .

[ ] - وقتی بخواهند حاصل عملهای چند پرانتز را بنمایند آنها را در داخل کروشه [ ] قرار میدهند .

چنانکه عبارت [(٥ - ٩) - ٨] × ٣ معلوم میکند که باید عدد ٣ را در حاصل کروشه ضرب نمود - و حاصل کروشه اینطور بدست میآید که از عدد ٨ حاصل پرانتز یعنی ٤ را کم کنیم بنابرین حاصل کروشه مساوی ٤ و عبارت بالا مساوی ١٢ میشود .

{ } - هرگاه مقصود نمایش حاصل عملهای چند کروشه باشد آنها را در داخل علامت آکلاد { } قرار میدهند .

چنانکه از عبارت {[(٥ - ٩) - ٧] ٢ - ١٥} - ١٧ معلوم میشود که باید از عدد ١٧ حاصل آکلاد را کاست - برای محاسبه آکلاد حاصل کروشه یعنی ٣ را در ٢ ضرب مینمائیم و حاصل آن یعنی ٦ را از ١٥ میکاهیم بنابرین حاصل آکلاد ٩ و عبارت بالا مساوی ٨ میشود

پرسش های ساده شفاهی

١ - عبارتهای زیر را بخوانید

$b - 6$; $a \times 5$; $x : 2$; $c - 8 = 5$

$2x - y = 18$; $d = 2c + 3f$; $V = \frac{4}{3} \Pi R^3$

٢ - در هر یک از عبارتهای پائین چه عملی باید کرد ؟

$2a - xy + b$

$\frac{x - 2y}{2}$

$(a+b)(a-b)$ ، $\frac{x}{a}-5(x+y)$ ، $2:[a-(2x+5)]$

۳- مقصود هر یک از رابطه های زیر را بیان کنید

$2x-5=ab$ $\qquad x>3$ $\qquad x<2a$

$ab<\frac{1}{4}$ $\qquad xy>\bar{a}:5$ $\qquad a-2b\neq 3$

۴- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را بگویید

$5(9-3):3$ $\qquad 3(2+5)$

$(13-8):(6-4)$ $\qquad (3+2)(9-7)$

$\sqrt{28-3}:5$ $\qquad \sqrt{(2+5)(9-2)}$

۵- مقدار عددی عبارت های زیر را حساب کنید

$4h^2$ وقتی که $h=4$ یا وقتی که $h=3$ باشد

ab^2 ، $a=2$ و $b=5$ باشد

$(m+n)^2$ ، $m=9$ و $n=4$ باشد

$(a-b)^2$ ، $a=4$ و $b=1$ باشد

$\sqrt{n}-x$ ، $n=25$ و $x=3$ باشد

۶- در مثلثی S نمایش مساحت و a قاعده و h ارتفاع وارد بر آنست این رابطه را توضیح دهید

$$S=\frac{1}{2}ah$$

۷- در مستطیلی S نمایش مساحت و p نصف محیط و a و b ضلع های آن میباشند معنای این دو رابطه چیست ؟

$S = ab \qquad 2p = 2(a+b)$

۸- V حجم کره و R شعاع آنست از $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ چه میفهمید ؟

۹- مجموع دو عدد a و ۳ را نمایش دهید .

۱۰- مجموع دو عدد a و b را نمایش دهید .

۱۱- تفاضل دو عدد a و b را نمایش دهید .

۱۲- تفاوت مزد دو نفر ۲۰ ریال است بوسیله یک تساوی نمائید .

۱۳- بنویسید که $a + 3$ مساوی سه برابر b است .

۱۴- بنویسید که $a + 3$ بزرگتر از دو برابر $b - 3$ است .

۱۵- درستی تساویهای زیر را بازاء مقدارهای مختلف x تحقیق کنید .

$x + x = 2x$

$x + x + 13 = 13 + 2x$

$3(x + 3) = 3x + 9$

بکار بردن نشانه و حرف

۶- اینک از دو مسئله زیر روشن میشود که چگونه بکار بردن حرف و نشانه سبب آسانی حل مسئله میگردد و در ضمن از حل حسابی مسئله و مقایسه آن با حل جبری برتری علم جبر بر حساب واضح میشود

مسئله ۱- مجموع دو عدد ۲۵ و تفاضل آنها ۱۳ است آن دو عدد کدامند؟

حل حسابی - بنا بفرض عدد بزرگتر ۱۳ یکه بیش از عدد کوچکتر است و چون مجموعشان ۲۵ است پس اگر از این مجموع ۱۳ را کم کنیم مانده یعنی ۱۲ دو برابر عدد کوچکتر میشود بنابرین عدد کوچکتر نصف ۱۲ یا مساوی ۶ است و چون ۱۳ بر آن بیفزائیم عدد بزرگتر بدست میاید

$$6 + 13 = 19$$

حل جبری - عدد کوچکتر را کمیند انیم به x مینامیم عدد بزرگتر برابر $x + 13$ و مجموعشان مساوی $(x + 13) + x$ یا $2x + 13$ میشود و بنا بفرض این مجموع ۲۵ است یعنی

$$2x + 13 = 25$$

چون ۱۳ از دو طرف تساوی کم کنیم حاصل میشود،

$$2x = 12$$

و از آنجا

$$x = 6$$

و بنابرین عدد بزرگتر مساوی $19 = 13 + 6$ میشود.

مسئله ۲- تفاوت مزد روزانه دو کارگر ۲۰ ریال است و چون ۳ ریال بر مزد روزانه هریک افزوده شود مزد بیشتر ۳ برابر مزد کمتر میشود مزد هریک چند است؟

حل حسابی - میدانیم هرگاه بر کاسته و کاهش یاب مقداری مساوی افزوده شود مانده تغییر نمیکند. پس در حقیقت میخواهیم مسئله زیر را حل کنیم:

تفاوت دو عدد ۲۰ و عدد بزرگتر ۳ برابر عدد کوچکتر است از اینجا معلوم میشود که عدد ۲۰ دو برابر عدد کوچکتر است بنابرین عدد کوچکتر مساوی ۱۰ و عدد بزرگتر ۳۰ میباشد که چون از هر یک ۴ کم شود مزد روزانه هر کارگر بدست میآید پس

مزد کوچکتر = ۷ ریال   مزد بزرگتر = ۲۷ ریال

حل جبری - چون مزد کمتر را که نمیدانیم x فرض کنیم مزد بیشتر مساوی $x + ۲۰$ میشود حال اگر بهر یک ۳ ریال بیفزائیم بنابفرض مزد بیشتر سه برابر مزد کمتر میشود یعنی

$$۳(x + ۳) = x + ۲۰ + ۳$$

ویا

$$۳x + ۹ = x + ۲۳$$

از دو طرف تساوی یک دفعه ۹ و یک دفعه x کم کنیم نتیجه میشود

$$۲x = ۱۴$$

واز آنجا

$$x = ۷$$

یعنی مزد کمتر ۷ ریال است و بنابرین مزد بیشتر مساوی $۲۰ + ۷ = ۲۷$ ریال میشود

۷- از مقایسه حل حسابی و جبری این دو مسئله مخصوصاً از حل مسئله دوم می بینید که در حل هر مسئله برا ه حساب یکرشته عملهائی بین مقدارهای دانسته انجام میشود که باید از روی فکر صحیح باشد تا بتوانیم بجواب برسیم و عموماً در حل هر مسئله نکته باریکی موجود است که تا آن نکته برنخوریم مسئله حل نمیشود چنانکه در مسئله دوم ثابت ماندن تفاوت دو مزد گرچه نکته ایست آسان ولی همه کس ممکن است متوجه بآن نشود و در صورتیکه در حل جبری لازم نیست باین نکته توجه شود

در جبر راه حل هر مسئله بر این روش است که صورت مسئله را بکمک حرفها و نشانه ها بنویسیم
(پرسش های از ۹ تا ۱۳ صفحهٔ ۸) و چنانکه دیدیم بکار بردن حرف و نشانه راه حل مسئله را بصورت
ساده و روشن درآورده و بعلاوه بوسیلهٔ رابطه های ساده از نوشتن عبارتهای دراز و دردسر
دلیل میکاهد.

بکار بردن حرف برای عمومیت دادن محاسبه ها

۸ - گرچه روش بالا سبب ساده نمودن حل مسئله میشود و به آسانی مجهول بدست میآید ولی
در پاسخ مسئله که عددی بیش نیست اثری از عملهائیکه موجب رسیدن به نتیجه شده است موجود نمیباشد
بقسمی که برای حل مسئله های مانند آن باید همهٔ عملهای بالا را از سر گرفت تا مجهول مسئله بدست آید.
این نقص را بوسیلهٔ بکار بردن حرف از بین برده اند از اینقرار:
مجهولها و همچنین دانسته های یک مسئله را بحرف نمایش داده و مسئله را برحسب دانسته های
کلی (حرفی) حل میکنند جواب مسئله که از این راه بدست میآید عبارتیست شامل کلیهٔ عملهائیکه باید در روی
مقدارهای دانسته انجام شود تا مجهول بدست آید. این عبارت را دستور نامند مانند دستور
(۱۰) در بهره کاری صفحهٔ (۲).

نخستین فایدهٔ دستور عمومیت دادن به حل یک مسئلهٔ کلی است که از روی آن میتوان
همهٔ مسئله هائیرا که مانند مسئلهٔ کلی بوده و فقط در مقدار عددی دانسته ها اختلاف داشته باشند
حل نمود.

برای فهمیدن این مطلب مسئلهٔ کلی زیر را حل میکنیم.

مسئله- مجموع دو عدد S و تفاضل آنها d است آن دو عدد کدامند؟

چون عدد کوچکتر را به x و عدد بزرگتر را به y بنامیم این دو تساوی بدست میآید

$$x+y=S$$

$$y-x=d$$

از جمع این دو تساوی خواهیم داشت.

$$۲y=S+d$$

و از آنجا $y=\frac{S+d}{۲}$ و بنابرین $x=\frac{S-d}{۲}$

پس جوابهای مسئله چنین است

$$(۱)\quad \begin{cases} x=\frac{S-d}{۲} \\ y=\frac{S+d}{۲} \end{cases}$$

یعنی هرگاه مجموع دو عدد x و y مساوی S و تفاضل آنها یعنی $y-x$ مساوی d باشد y مساویست با نصف $S+d$ و x مساویست با نصف $S-d$

از روی این دستور میتوان مسئله های مانند مسئله بالا را حل نمود چنانکه اگر مجموع دو عدد ۱۷ و تفاضل آنها ۹ باشد آن دو عدد عبارتند از:

$$x=\frac{S-d}{۲}=\frac{۱۷-۹}{۲}=۴$$

$$y=\frac{S+d}{۲}=\frac{۱۷+۹}{۲}=۱۳$$

۹- فایده های دیگر دستور- بکار بردن دستورهای جبری علاوه بر آنکه بسبب عمومیت دادن حل مسئله میگردد فایده های دیگری نیز دارا است که در زیر بیان میکنیم.

الف- بکار بردن حرف و نشانه عموماً سبب اختصار در نوشتن یک قضیه و بخاطر سپردن آن میشود

مثلاً بجای اینکه بگوئیم اگر جای سازه (عامل) های ضرب را تغییر دهیم حاصل ضرب تغییر نمیکند کافی است این رابطه را بخاطر بسپاریم

$$ab = ba$$

و همچنین بجای اینکه بگوئیم درازای محیط دائره برابر است با حاصل ضرب قطر در عدد π کافی است محیط دایره را بحرف C و شعاع را بیکی از حرفها مانند R نموده این دستور را بنویسیم.

$$C = 2\pi R$$

ب- از یک دستور میتوان دستورهای دیگر بدست آورد

مثال- اگر v نمایش تندی ثابت متحرکی در یک زمان باشد و مدت حرکت t اختیار گردد راهی که متحرک بپیماید مساوی tv خواهد بود که چون آنرا به e بنامیم دستور زیر بدست میآید

$$e = vt \quad (۱)$$

از این دستور دستورهای $v = \frac{e}{t}$ (۲) و $t = \frac{e}{v}$ (۳)

نتیجه میشود

مثلاً اگر ماشینی با تندی ۳۶ کیلومتر در ساعت مدت ۵ ساعت حرکت کرده باشد

راهی که رفته از دستور (۱) بدست میآید:

$$e = vt = 36 \times 5 = 180 \text{ کیلومتر}$$

همچنین اگر اتومبیلی ۱۶۰ کیلومتر را در ۴ ساعت پیموده باشد تندی آن از دستور (۲) معلوم میشود:

$$v = \frac{e}{t} = \frac{160}{4} = 40 \text{ کیلومتر در ساعت}$$

وقتی متحرکی مسافت ۴۸ کیلومتر را با تندی ثابت ۹ کیلومتر در ساعت پیموده باشد مدت حرکتش چنین است

$$t = \frac{e}{v} = \frac{48}{9} \text{ ساعت} = \text{۵ ساعت و ۲۰ دقیقه}$$

ج - بوسیله ترکیب دو دستور میتوان نتیجه های مهم بدست آورد.

مثلاً اگر c و c' بترتیب محیط های دو دایره بشعاع R و R' باشد این دو دستور را داریم:

$$c = 2\pi R$$

$$c' = 2\pi R'$$

از تقسیم این دو تساوی چنین نتیجه میشود $\frac{c}{c'} = \frac{R}{R'}$

یعنی نسبت محیط دو دایره بیکدیگر مساوی نسبت بین دو شعاع آنها است

پرسش های ساده شفاهی

۱- عبارتهای زیر را بوسیله دستورهائی بنمائید:

الف - S مجموع دو عدد a و b است

ب - از تقسیم a بر b عدد q خارج قسمت و r باقیمانده است

ج - چون در یک برخه برخه شمار (صورت) و برخه نام (مخرج) را در یک عدد ضرب و یا بر یک عدد تقسیم کنیم مقدار برخه تغییر نمیکند

۲- بین دو عدد a و b تساویهای زیر برقرار است هریک از آنها چه معنائی دارد؟

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)(a-b) \quad a^2-b^2$$

۳- تحقیق کنید که تساویهای بالا صحیح است هرچه باشد a و b

۴- این عبارتها را حساب کنید وقتیکه x مساوی ۳ و y مساوی ۵ باشد

xy^2 x^2y $\frac{5x}{y}$

$\sqrt{x}+y$ $\sqrt{x+y}$ $\frac{5x-2y}{5}$

$2x^2-y^2$ $(y-x)(y+5)$

$(y+x)^2$ $(y+2x-5)^2$

تمرین

۱- هریک از عبارتهای پائین را حساب کنید

۶ : ۳ + ۳   ۱۴ − (۱۶ − ۷) + ۱۲ − ۵

۳۴ (۲ + ۳) : ۸ − ۱۰   ۹ × ۲۳ − ۴ × ۶ − ۸ : (۵ − ۱)

$۸^{۳} − ۵^{۴}$ (۱۰ − ۳)(۱۶ − ۳ × ۳ + ۸ : ۲)

$$3 \times 40 - 6 \times 2 + 12 \times 35 : 2^3 \times 7 - 3^2 + (5-2)^2$$

۲- مقدار عددی x و y را از روی دستورهای

$$y = m^3 + m - 11 \quad \text{و} \quad x = A^2 - 2A - 5$$

بدست آورید وقتی که $A=10$ یا $A=8$ یا $A=5$ باشد

و $m=12$ یا $m=10$ یا $m=15$ باشد

۳- عبارت $(x-y) - \sqrt{x-y}$ را حساب کنید

وقتیکه $x=5$ و $y=3$ باشد

۴- در عبارت

$$\frac{a}{a+b} + \frac{a+b}{a} + \frac{b}{a+b} + \frac{a+b}{b} - \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$$

بجای a و b دو عدد دلخواه گذارده مقدار عددی آنرا حساب و تحقیق کنید که مقدارهای

a و b هرچه باشد مقدار عددی این عبارت ۳ است

۵- a و b و c نمایش درازای (طول) پهلوها (ضلع‌ها)ی یک سه‌بر (مثلث)،

و p نیم‌پیرامون (محیط) و S نمایش مساحت آن باشد مطلوبست محاسبهٔ مساحت سه‌بر از روی

دستور $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

در حالتهای مخصوص زیر

$a = b = c = 25$

$a = b = 30$ و $c = 50$

$a = 75 \quad b = 65 \quad c = 40$

۷- باغی است بشکل مستطیل به درازای b و پهنای c که دور آنرا دیواری بکلفتی a و بلندی d کشیده اند و درمیان باغ حوضی است بشکل دایره بشعاع R حساب کنید حجم دیوار و سطح زمین باغ را

اوّل از روی a و b و c و d و R

دوّم در این حالت ها: $R = ۴٫۱۰$ ، $d = ۱٫۲۵$ متر ، $a = ۰٫۴۰$ متر ، $c = ۳۸$ متر ، $b = ۸۵$ متر

$R = ۵٫۲$ ، $d = ۱٫۵$ ، $a = ۰٫۲۵$ ، $c = ۴۰$ متر ، $b = ۱۱۰$ متر

۸- مطلوبست تعیین دستور کلی برای محاسبهٔ دو عدد وقتی که مجموعشان را بدانیم و یکی دو برابر دیگری باشد مسئله های ۹ تا ۱۳ را بدو راه حساب و جبر حل نموده و نیز بوسیلهٔ بکار بردن حرف بجای دانسته های مسئله دستورهای کلی بدست آورید.

۹- پدری ۵۰ سال دارد و پسرش ۱۴ سال پس از چه مدت سال پدر سه برابر سال پسر میشود؟

۱۰- عددی پیدا کنید که $\frac{۱}{۳}$ آن بعلاوهٔ $\frac{۱}{۴}$ آن مساوی ۷ باشد.

۱۱- مطلوبست تعیین عدد دو پیکری دو رقمی، بقسمی که مجموع دو پیکرش ۹ بوده و چون آنرا از وارونه اش کم کنند عدد ۲۷ بدست آید.

۱۲- شخصی مبلغی از سرمایه اش را از قرار ۵٪ و باقی را که ۴۶۲۰ ریال بیش از مبلغ اوّلی است از قرار ۶٪ برابحه میگذارد سود سه ماهه سرمایهٔ دوّم ۴۹٫۴ ریال بیش از سود سه ماهه سرمایهٔ اوّل بوده است مطلوبست تعیین مبلغ سرمایه.

۱۳- چه مقدار نقرهٔ ویژه باید با ۱۵۰۰ گرم شمش بعیار ۰٫۸۲۵ آمیخته شود تا عیار شمش حاصل ۰٫۸۷۵ گردد؟

۱۴- میخواهیم مبلغ ۱۵۶۰ ریال را بدو قسمت کنیم بطوریکه یکی از آنها دو برابر دیگری شود.

۱۵- شخصی چند متر پارچه از قرار هر ۵ متری ۷ ریال خریده و از قرار هر ۷ متری ۱۱ ریال میفروشد و بدین ترتیب ۱۸ ریال سود میبرد چند متر پارچه خریده است؟

۱۶- شخصی مدت یکساعت و ۲۵ دقیقه با تندی ثابتی راه میرود و پس از آن مدت ۱۲ دقیقه با دو برابر تندی پیش حرکت میکند بر روی هم ۸۱۷۵ متر راه رفته است معین کنید تندی حرکتش را در مدت اول و مدت دوم

۱۷- پیاده ای از منزل خود در تهران برای رفتن بیک نقطه ای از شمیران ساعت ۵ صبح حرکت میکند و ساعتی ۴۵۰۰ متر میرود و پس از نیمساعت توقف در آن نقطه برمیگردد و در برگشتن هر ساعتی ۶۰۰۰ متر می پیماید و نیمساعت بعد از ظهر بمنزل خود میرسد معین کنید اول فاصله منزل آن شخص را از آن نقطه دوم در چه ساعتی بمقصد رسیده است!

۱۸- فاصله دو کان زغال ۳۲۰ کیلومتر است هر خروار زغال در کان نخست ۲۱۶٫۶۰ ریال و در دومی ۱۴۲٫۱۰ ریال قیمت دارد کرایه بردن هر دو خروار زغال در کیلومتر ۰٫۷۵ ریال است میخواهیم بین این دو کان کارخانه ای بنا کنیم بچه فاصله از کان نخست باید کارخانه ساخته شود تا زغالی که از این دو کان بآنجا میرسد دارای یک قیمت باشد؟

۱۹- پیراهن دوزی برای دوختن چند دست پیراهن و زیرشلواری ۶۷٫۵ متر مربع از یک پارچه نخی لازم دارد و میخواهد پیش از شستن بدوزد در صورتیکه بدانیم پهنای این پارچه نخی که در بازار بدست میآورد ۸۰ سانتیمتر است و پس از شسته شدن $\frac{1}{16}$ پهنا و $\frac{1}{11}$ درازای آن آب میرود معین کنید چند متر

باید بگیرد تا رفع احتیاجش بشود؟

۲۰ـ دانش‌آموزی در درس جبر سه مرتبه امتحان میدهد در امتحانهای اول ودوم ۱۴ و ۱۵٫۵ گرفته است میخواهد معدل این سه امتحان ۱۶ شود چه نمره‌ای باید در امتحان سوم بگیرد؟

۲۱ـ معدل سه امتحان دانش‌آموزی ۱۵ است و باید یک امتحان دیگر بدهد میخواهد معدل چهار امتحان ۱۵٫۵ باشد چه نمره‌ای باید در امتحان چهارم بگیرد؟

۲۲ـ برای تبدیل F درجهٔ فاهرنهایت (گرماسنج معمول انگلیسها است) به c درجه گرماسنج یکصد درجه دستور زیر را بکار میبرند

$$c = \frac{5}{9}(F - 32)$$

پزشکی انگلیسی ببالین بیماری آمد و درجهٔ او را با گرماسنج فاهرنهایت گرفت و ۱۰۲ درجه شد معین کنید چند درجه (از گرماسنج ۱۰۰ درجه) تب دارد؟

۲۳ـ پیغمبر اسلام در سال ۶۲۲ میلادی از مکه بمدینه هجرت کرد. سالهای میلادی خورشیدی است و تاریخی که در ایران پیش از عصر پهلوی بکار میرفت هجری قمری بود. درصورتیکه بطور تقریب ۱۰۰ سال قمری برابر با ۹۷ سال خورشیدی باشد دستور تبدیل M سال میلادی را به H سال هجری قمری (بطور تقریب) پیدا کنید.

۲۴ـ برحسب تصمیم باشگاه سوارکاران هرسال در آخرین روز اسب دوانی تهران سه جایزه به بهترین اسبهای برنده داده میشود. جایزهٔ اسب نخست باید چهار برابر و جایزهٔ دوم دو برابر جایزهٔ سوم باشد اگر ۱۷۵۰۰ ریال برای سه جایزه تخصیص داده باشند مبلغ هریک چقدر است؟

۲۵ـ A ریال را بنسبت $\frac{1}{3}$ و ۹ تقسیم کنید.

۲۶- دو نفر شریک میخواهند K ریال سود را بین خود تقسیم کنند میدانیم سرمایهٔ اولی a ریال و در مدت t سال و سرمایهٔ دومی a' ریال در مدت t' سال در شرکت بوده است سهم هر یک چه میشود؟

۲۷- تندی صوت در هوائیکه بگرمی t باشد از روی دستور $v = 332\sqrt{1+0{,}00365t}$ بدست میآید معین کنید تندی صوت (v) را در هوای ۳۵°

۲۸- از روی دستور بالا معین کنید گرمی هوا را بالفرض اینکه بدانیم تندی صوت ۳۳۸ متر باشد.

۲۹- میدانیم وزن یک جسم مساویست با حاصل ضرب حجم آن جسم در وزن مخصوصش اولاً این قضیه را بوسیله یک رابطهٔ جبری بنویسید ثانیاً اگر وزن جسم را به P و حجمش را به V و وزن مخصوصش را به D بنامیم در حالتی که $V = 12$ سانتیمتر مکعب و $D = 3{,}5$ باشد وزن آنجسم را حساب کنید و نیز در حالتیکه $P = 120$ کیلوگرم و $D = 1{,}8$ باشد حجم آنرا بدست آورید.

فصل دوم

الف - عدد جبری

۱- چند بهائی (کمیتهائی) که دارای دو سو میباشند- بیشتر در زندگانی بهاسته چند بهائی (کمیتهائی) برمیخوریم که دارای دو سو میباشند

مثال ۱- دفتر حساب روزانه هر تجارتخانه شامل پولهائیست که وارد صندوق تجارتخانه

شده و نیز شامل پولهائیست که از طرف تجارتخانه پرداخته شده است گرچه هر کدام مبلغی پولند ولی در معنی با یکدیگر اختلاف کلی دارند .

مثال ۲- از خانه بدبیرستان میروید و از دبیرستان همان راه را برمیگردید اینجا دو راه مساوی پیموده اید ولی یکی شما را بدبیرستان نزدیک میکند و دیگری شما را از آن دور مینماید. بنابرین این دو مسافت دارای دو سوی مخالفند .

مثال ۳- درس جبر شما دو ساعت بظهر مانده است و یا آنکه ورزش شما دو ساعت از ظهر گذشته است این دو مدت نیز دارای دو سوی مخالفند .

۱۱- عددهائیکه در حساب بکار میرود برای نمودن اینگونه چندیهای کافی نیستند

وقتی مجهول یک مسئله از چندیهائی است (کمیتهائیست) سودار باید علاوه بر محاسبه مقدار عددی مجهول سوی آنرا نیز تعیین کرد .

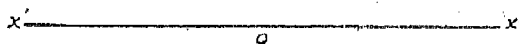
عددهای حسابی تنها مقدار عددی مجهول را بدست میدهد بدون اینکه سوی آنرا معین کند و اگر بخواهیم بکمک عددهای حساب سوی چندیها نیز معلوم شود ناچاریم الفاظی بکار برده جمله بندی کنیم .

مثلاً بگوئیم ۵ ریال بستانکاریم یا ۵ ریال بدهکار که دو لفظ بستانکاریم و بدهکار سوی چندی را معلوم میکند . بنابرین عددهای حسابی به تنهائی برای نمایش چندیهائیکه دارای دو سوی مخالفند کافی نمیباشد

درجبر برای اندازه گرفتن اینگونه چیزها عددهائی درست کرده اندکه هم مقدار عددی و هم سوی چیزی را بنماید این عددها همان عددهای حسابند که بر آنها یکی از دو نشانهٔ + یا - مقدم شده باشد.

مثال - اگر بطور کلی مبلغ بستانی (طلب) را بعلامت + و بدهی را بعلامت - بنمائیم در مثال پیش بجای اینکه بنویسیم ۵ ریال بستانکاریم کافیست بنویسیم ۵ + ریال و بجای آنکه بنویسیم ۵ ریال بدهکاریم بنویسیم ۵ - ریال

میتوان گفت که دارائی ما ۵ + ریال یا ۵ - ریال میباشد

مثال دیگر - متحرکی از نقطهٔ O واقع بر خط مستقیم $x'x$ حرکت میکند فرض میکنیم ۹ متر حرکت کرده باشد میخواهیم معلوم کنیم کجا رسیده است - برای این مقصود باید بدانیم بطرف راست O حرکت کرده است یا بطرف چپ.

x' ——————— O ——————— x

چنانکه می بینیم عدد ۹ به تنهائی برای تعیین جای متحرک کافی نیست بلکه باید بر این عدد یکی از دو لفظ بطرف راست یا بطرف چپ را اضافه کرد تا جای متحرک معلوم شود.

حال اگر راه ای را که متحرک بسمت راست می پیماید با نشانهٔ + و مخالف آنرا با نشانهٔ - بنمائیم وقتی میگوئیم ۹ + متر پیموده معلوم میشود که این متحرک در فاصلهٔ ۹ متری نقطهٔ O و در سمت راست آن واقع است. همچنین اگر ۹ - متر پیموده باشد معنای آن این است که متحرک به ۹ متری O در سمت چپ آن رسیده است.

مثال دیگر - اگر سطح اقیانوس را مبداء ارتفاع فرض کنیم و ارتفاع نقاط بالای آنرا با نشانهٔ + و نقاط پائین‌تر را با نشانهٔ - بنابیم وقتیکه بگویند بلندی یک نقطهٔ ۷۰۰ + متر است معلوم میشود که آن نقطه ۷۰۰ متر بالاتر از سطح دریا واقع است.

و وقتی گفتیم بلندی دریای خزر ۲۰ - متر است معلوم میشود که سطح دریای خزر ۲۰ متر از سطح اقیانوس پائین‌تر است.

مثال دیگر - اگر درجهٔ حرارت مکانی ۱۵° - باشد معلوم میشود که آن مکان ۱۵ درجه سردتر از یخی است که در حال آب شدن است.

۱۲ - عددهای جبری - هر عدد حسابی را که نشانهٔ + جلوی آن باشد عدد مثبت و هر عدد حسابی را که نشانهٔ - جلوی آن باشد عدد منفی مینامند.

مانند $+\frac{2}{3}$ (خوانده میشود بعلاوه دو سوم) و $-\sqrt{7}$ (منهای ریشهٔ دوم هفت)

عددهای مثبت و عددهای منفی را عددهای جبری گویند.

۱۳ - عددهای حسابی را قدر مطلق عددهای جبری گویند.

چنانکه $\sqrt{3}$ قدر مطلق دو عدد جبری $+\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ است و قرار براین داده اند که قدر مطلق عدد جبری a را چنین نویسند $|a|$

پس $|-2| = 2$

۱۴ - تساوی دو عدد جبری - دو عدد جبری وقتی مساویند که دارای یک قدر مطلق و یک نشانه باشند.

۱۵- دو عدد قرینه - دو عدد جبری که دارای یک قدر مطلقند ممکن است مساوی نباشند مانند ۷- و ۷+

هرگاه قدر مطلق دو عدد مساوی ولی نشانهٔ آنها مختلف باشد آن دو عدد را قرینهٔ یکدیگر گویند مانند ۷- و ۷+ ؛ x- و x+ ؛ $+\frac{a}{b}$ و $-\frac{a}{b}$

۱۶- غالباً در عمل نشانهٔ + را از جلوی عددهای جبری برداشته آنها را بدون نشانه نویسند مثلاً بجای ۵+ و $+\sqrt{3}$ و $+\alpha$ فقط ۵ و $\sqrt{3}$ و α نویسند.

ولی هیچوقت نباید عددهای منفی را بدون نشانهٔ - نوشت.

پرسش های سادهٔ شفاهی

۱- شمارهٔ شاگردان کلاسی ۳۵ است ۷ نفر آنان غائبند حاضران و غائبان را با عدد جبری بنمائید.

۲- دو متحرک از نقطهٔ O بر خط راستی حرکت مینمایند موضع های این دو متحرک را بوسیلهٔ زینه بندی و مدرج نمودن خط و همچنین فاصله های آن دو را از یکدیگر در هر یک از حالتهای زیر معین کنید:

اوّلی ۸+ متر و دوّمی ۷+ متر پیموده

« ۹- « « « « ۱۲- «

« ۵- « « « ۷+ «

« « ۲+ « « « ۶- «

اولی ۴- متر و دومی ۴+ متر پیموده

〃 +۵ 〃 〃 〃 +۵ 〃

۳- بلندترین نقطه های کره زمین قله کوه اورست است به بلندی ۸۸۲۰ متر و ژرفترین نقطه های زمین نقطه ای از ته اقیانوس ساکن است به ژرفای (عمق) ۹۵۰۰ متر این دو طول را بعدد جبری نمایید

۴- گرماسنجی ۱۵ زینه (درجه) را نشان میدهد - اگر سطح الکول (مایع) درونی آن ۱۰ زینه یا ۱۷ زینه یا ۱۵ زینه پائین بیاید چه زینه را نشان خواهد داد؟

۵- گرماسنجی در ساعت ۷ صبح ۱۰- زینه را نشان میدهد اگر هر ساعتی که میگذرد سطح الکول درونی آن سه زینه بالا بیاید معین کنید در ساعتهای ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ صبح چه زینه ای را نشان خواهد داد؟

۶- تجارتخانه ای در یک روز بشرح پائین داد و ستد نموده است.

نخستین بار - دو دریافتی بمبلغ ۴۵۰ ریال و ۳۰۰ ریال داشته است.

بار دوم - ۳۵۰ ریال و ۵۰۰ ریال پرداخته است.

بار سوم - ۶۵۰ ریال پرداخته و ۹۰۰ ریال دریافت داشته است.

بار چهارم - ۳۰۰ ریال دریافت داشته و ۷۵۰ ریال پرداخته است.

بار پنجم - ۲۰۰ ریال دریافت داشته و ۲۰۰ ریال پرداخته است.

اولاً مطلوبست نمایش پولهای دریافتی و پرداختی تجارتخانه بعددهای جبری

ثانیاً نتیجه هر بار داد و ستد را بعدد جبری بنمائید

ب ـ جمع عددهای جبری

مثال ۱ ـ باربری در یک روز دو دفعه بار برده است یکدفعه ۵ ریال و یکدفعه ۷ ریال مزد گرفته ضمناً یکدفعه ۵ ر۱ ریال و دفعهٔ دیگر ۷ ر. ریال خرج کرده است درآمد و هزینهٔ او را با عددهای جبری نمایند.

اگر درآمد را با عدد مثبت و هزینه را با عدد منفی نمایش دهیم دو عدد ۵ + و ۷ + نمایش درآمدها و دو عدد ۵ ر۱ - و ۷ ر. - نمایش هزینه های او میباشند و روشن است که مجموع چند درآمد درآمد است یعنی مجموع چند عدد مثبت عدد یست مثبت پس مجموع درآمدهای او یعنی مجموع ۵ + و ۷ + عدد ۱۲ + خواهد بود یعنی

$$(+5)+(+7)=+12$$

و چون مجموع چند هزینه هزینه است بنابرین مجموع چند عدد منفی عدد یست منفی پس مجموع هزینه های او یعنی مجموع دو عدد ۵ ر۱ - و ۷ ر. - عدد ۲ ر۲ - میباشد یعنی

$$(-1,5)+(-0,7)=-2,2$$

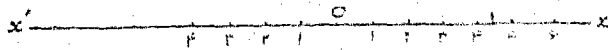
ازین مثال قاعدهٔ زیر نتیجه میشود:

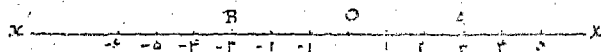
۱۴ ـ قاعده ـ مجموع دو یا چند عدد جبری هم نشانه عدد یست جبری که قدر مطلقش مساوی مجموع قدر مطلقهای آن چند عدد بوده و نشانه اش با آنها یکی باشد:

$$(+11)+(+7)=+18$$

$$\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{4}{5}$$

۱۸- بر روی خط راست x'x بنحوی نقطه ای مانند O برگزیده و از دو سمت آن قطعه های متساوی بر این خط جدا میکنیم حال اگر فاصله های نقطه O را از نقطه های واقع در سمت

x' — ۴ ۳ ۲ ۱ O ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ — x

راست آن بعدد مثبت بنامیم فاصله های نقطه O از نقطه های واقع در سمت چپ بعدد منفی نمایش داده خواهد شد مثلاً نقطه ای که فاصله اش از O ۳+ است نقطه A است و نقطه ای که

x' — ۶- ۵- ۴- ۳- (B) ۲- ۱- O ۱ ۲ ۳ (A) ۴ ۵ — x

فاصله اش ۳- است نقطه B میباشد.

میدانیم که مجموع دو عدد ۲+ و ۳+ عدد ۵+ است - از روی خط زینه دار بالا هم میشود این مجموع را بدین قسم بدست آورد که از نقطه ۲ شروع کرده باندازه سه قطعه بسمت راست برویم تا به نقطه ۵ برسیم یعنی $+2+(+3)=+5$

همچنین اگر بخواهیم مجموع ۳- و ۴- را حساب کنیم کافیست که از نقطه ۳- شروع کرده ۴ قطعه بسمت چپ بشماریم تا به نقطه ۷- برسیم یعنی $-3+(-4)=-7$

میدانیم تفاضل ۳-۵ مساوی ۲ است از روی خط بالا هم میتوانیم این عمل تفریق را باین شکل انجام داد که از نقطه ۵ شروع کرده و باندازه ۳ قطعه بسمت چپ برویم در اینصورت بنقطه ۲ میرسیم بهمین ترتیب اگر از عدد ۵ پنج یکه کم کنیم بنقطه O میرسیم - بطور کلی برای تفریق این قاعده را داریم:

برای کم کردن عدد مثبت a از عدد مثبت b کافی است از نقطه b شروع

گروه باندازهٔ a قطعه بسمت چپ برویم تا بنقطهٔ a-b برسیم.

اگر بخواهیم مطابق این قاعده عدد ۵ را از ۴ کم کنیم به نقطهٔ ۱- میرسیم یعنی

۴ − ۵ = −۱

ولی چنانکه میدانیم این تفریق در حساب ممکن نیست زیرا ۵ بزرگتر از ۴ است و فقط میتوان چهار یکهٔ ۵ را از یکه های ۴ کم کرد و یک یکه زیاد است که نمیتوانیم کم کنیم و درحقیقت ۱- نمایش همین یک یکه کم نشده است و همچنین در تفریق ۲- = ۵ − ۳ عدد ۲- نمایش ۲ یکهٔ ۵ است که نتوانستیم از ۳ کم کنیم

مثال ـ اگر درآمد شخصی ۵ ریال و هزینه اش ۷ ریال باشد گوئیم دارائی او ۷ − ۵ یعنی ۲- ریال است ـ مطابق شرح بالا معنای آن این است که هزینه او ۲ ریال بیش از درآمدش است

پرسش های سادهٔ شفاهی

بوسیلهٔ خط زینه دار بالا عمل های زیر را انجام دهید

۴ + ۳ ۶ − ۴ ۷ − ۷

۳ − ۷ ۴ − ۹ ۵ − ۵

تبصره ـ روشن است که مثلا برای کم کردن ۶ از ۱۵ میتوانیم یکه های ۶ را یکی یکی از ۱۵ کم کنیم تا به ماندهٔ ۹ برسیم میتوان نیز یک قسمت از یکه های ۶ مثلا ۴ یکهٔ آنرا اول تفریق کرد تا بشود ۱۱ و بعد ۲ یکهٔ دیگر را از ۱۱ کم کرد تا به ۹ برسیم و در هر تفریقی میتوان مانند این مثال عمل کرد

مثلاً برای کم کردن ۱۵ از ۶ اگر مستقیماً عمل کنیم به ماندهٔ ۹- میرسیم:

۶ - ۱۵ = -۹

ومیتوان مثلاً اول ۶ یکهٔ ۱۵ را از ۶ کم کرد تا بشود صفر و بعد ۹ یکهٔ دیگر را از صفر کم میکنیم تا به ۹- برسیم یعنی

۰ - ۹ = - ۹

همچنین میتوان اول ۷ یکهٔ ۱۵ را از ۶ کم کرد تا بشود ۱- و بعد ۸ یکهٔ دیگر را از ۱- تفریق کرد تا به ۹- برسیم یعنی

-۱ - ۸ = -۹

و نیز میتوانیم اول ۸ یکه کم کنیم تا بشود ۲- و بعد ۷ یکهٔ دیگر را

-۲ - ۷ = -۹ و مانند اینها

و این تفریق‌ها هم از روی خط زینه دار بالا بآسانی انجام میشود - مثلاً برای کم کردن ۷ از ۲- کافیست از نقطهٔ ۲- شروع کرده هفت قسمت بطرف چپ برویم تا به نقطهٔ ۹- میرسیم.

پرسش‌های سادهٔ شفاهی

بوسیلهٔ خط زینه دار بالا عمل‌های زیر را انجام دهید:

۳ - ۷ ۰ - ۷ -۳ - ۴

۲ - ۵ -۳ - ۲ ۰ - ۵

۱۹- چون غرض از کم کردن عدد ص از عدد ه پیدا کردن عددیست مانند د که چون با ص جمع شود عدد ه بدست آید بنابرین از تفریق

۲ − ۵ = −۳ نتیجه میشود که ۵ + (−۳) = ۲

−۳ − ۲ = −۵ « « ۲ + (−۵) = −۳

۰ − ۵ = −۵ « « ۵ + (−۵) = ۰

از تساویهای طرف چپ قاعدهٔ زیر بدست میآید:

۲۰- قاعده - مجموع دو عدد جبری که نشانهٔ آنها یکی نیست عدد جبری که قدر مطلقش مساوی تفاضل قدر مطلقهای آن دو عدد بوده نشانه اش نشانهٔ عددیست که قدر مطلقش بیشتر است

۲۱- نتیجهٔ اوّل - مجموع دو عدد قرینه صفر است

نتیجهٔ دوّم - چون مجموع دو عدد قرینه عددیست که قدر مطلقش صفر بوده و علامتش بدلخواه + یا − میباشد بنابرین

صفر هم عددیست جبری که میتوان بر آن + یا − مقدم داشت و یا آنرا بدون نشانه نوشت

نتیجهٔ سوّم - حاصل جمع هر عدد جبری با صفر خود آن عدد است.

مثال ۱- شخصی ۱۵۰ ریال بستانکار است و ۱۲۰۰ ریال بدهکار مبلغ دارائی او را بعدد جبری بنمائید.

معلوم است که این شخص ۱۲۰ - ۱۵۰ = ۳۰ ریال بستانکار است چون مبلغ بدهی او را بعدد جبری منفی و مبلغ بستانکاری او را بعدد جبری مثبت بنمائیم و چون مجموع دو عدد جبری ۱۵۰ + ۱۲۰ - موافق قاعده بالا ۳۰ + میشود بنابرین برای تعیین دارائی شخص باید مبلغهای بدهی بستانکاری را که بعدد جبری نمود و شده اند با یکدیگر جمع نمود

مثال ۲ - شخصی بر خط راستی از مبداء ۰ ، ۲۷۰ متر بطرف راست (که مثبت گرفته میشود) راه پیموده و بعد ۳۰۰ متر در جهت مخالف رفته میخواهیم بدانیم چه فاصله از نقطه ۰ رسیده و در کدام طرف آن واقع است ؟

باسانی از روی یک شکل معلوم میشود که این شخص بفاصله ۲۷۰ - ۳۰۰ یعنی به ۳۰ متری سمت چپ ۰ رسیده است .

ولی چون دو عدد جبری ۲۷۰ + و ۳۰۰ - را باهم جمع کنیم از روی قاعده بالا (۲۱) نتیجه میشود

$$(-300) + (+270) = -30$$

بنابرین برای تعیین موضع متحرک باید راههای پیموده شده در جهتهای مختلف را که با عددهای جبری نموده ایم باهم جمع کنیم

۲۲ - تبصره - در همین مثال بجای اینکه متحرک اول ۲۷۰ + متر راه رود و بعد ۳۰۰ - متر اگر اول ۳۰۰ - متر و بعد ۲۷۰ + متر میرفت بهمان نقطه میرسید یعنی نتیجه یکی میشد - پس

$$(+270) + (-300) = (-300) + (+270)$$

یعنی در جمع دو عدد جبری میتوانیم جای آندو عدد را عوض کنیم بدون اینکه مجموع جبری تغییر کند

۲۳- جمع چند عدد جبری - برای پیدا کردن حاصل جمع عددهای ۲+ و ۷- و ۸+ و ۶- که بصورت (۶-)+(۸+)+(۷-)+۲+ نوشته میشود قرار بر اینست که ابتدا مجموع دو عدد اولی را حساب کرده آنرا با سومی جمع کنیم و بعد حاصل را با چهارمی جمع نمائیم تا حاصل جمع کل بدست آید.

$$+۲+(-۷)+(+۸)+(-۶)=$$

$$-۵+(+۸)+(-۶)=$$

$$+۳+(-۶)=-۳$$

عدد ۳- را مجموع جبری عددهای بالا گویند

۲۴- خواص جمع - الف - چنانکه دیدیم میتوان در جمع دو عدد جبری جای آن دو عدد را تغییر داد در جمع چند عدد جبری هم میتوان جای آنها را بدلخواه تغییر داد مثلاً این تساوی برقرار است

$$۸+(-۳)+(-۴)=-۴+(+۸)+(-۳)$$

زیرا از روی قرارداد بالا (۲۳) بترتیب خواهیم داشت

$$۸+(-۳)+(-۴)=۵+(-۴)=+۱$$

$$-۴+(+۸)+(-۳)=+۴+(-۳)=+۱$$

ب - در جمع چند عدد جبری میتوان بجای دو یا چند عدد آنها مجموع جبریشان را قرار داد

مثلاً تساوی زیر برقرار است

$$(-7)+(+8)+(-3) = [(-7)+(-3)]+(+8)$$

مطابق قرارداد مجموع جبری طرف اول ۲- و طرف دوم مساوی حاصل جمع کرده است با ۸+

و با (+۸)+(-۱۰) یعنی ۲-

۲۵- نتیجهٔ ۱- از دو خاصیت بالا نتیجه میشود که در جمع جبری چند عدد میتوان دو عدد قرینه را حذف نمود بدون اینکه مجموع جبری تغییر کند.

۲۶- نتیجه ۲- میتوان برای محاسبهٔ مجموع جبری چند عدد عددهای مثبت و عددهای منفی را جداگانه جمع نمود تا این مجموع مبدل به مجموع دو عدد جبری شود یکی مثبت و یکی منفی مثلاً

$$+4+(-7)+(+8)+(-3)+(-6) =$$

$$+4+(+8)+(-7)+(-3)+(-6) = +12+(-16)$$

$$= -4$$

بوسیلهٔ این قاعده میتوان عمل جمع عددهای جبری را تند تر انجام داد

پرسش های سادهٔ شفاهی

۱- حاصل جمعهای زیر را از روی قاعده های جمع بدست آورده بوسیلهٔ خط زینه دار [۱۸] نیز درستی نتیجه را تحقیق کنید.

۵ + (-۲) ‏ ‏ ‏ ۲ + (-۵) ‏ ‏ ‏ ۵ + (+۲)

-۷ + (+۱) ‏ ‏ ‏ -۴ + (-۱) ‏ ‏ ‏ -۳ + (-۲)

۰ + (-۳) ‏ ‏ ‏ -۸ + (+۹) ‏ ‏ ‏ -۶ + (+۶)

۲ـ حاصل جمعهای زیر را حساب کنید

-۲٫۵ + (-۳٫۵) ‏ ‏ ‏ $+\frac{۳}{۴} + (+\frac{۷}{۴})$

۳٫۵ + (-۵٫۵) ‏ ‏ ‏ $+۱\frac{۲}{۵} + (-۱\frac{۱}{۵})$

(-۱۰) + (+۱۵) + (-۵) ‏ ‏ ‏ -۷ + (-۲) + (-

۳ـ دانش‌آموزی در راه خانه بمدرسه ۱۵۰ متر از خانه دور میشود و در میان راه ۲۵ متر برگشته باز ۳۰۰ متر بطرف مدرسه میرود معلوم کنید بچه فاصله از خانه رسیده است.

۴ـ شخصی دو بدهی دارد یکی ۱۵ ریال و دیگری ۱۰ ریال در عوض ۱۲ ریال بستانکار است مقدار دارائی او را تعیین کنید.

۵ ـ سه ساعت به ظهر مانده است ۱۵ ساعت دیگر چه ساعتی است و یا آنکه چهار ساعت پیش چه ساعتی بوده؟

۶ ـ در هر یک از تساویهای زیر بجای علامت ؟ عدد مناسب بگذارید تا تساوی برقرار باشد

-۹ + ? = -۷ ‏ ‏ ‏ ۵ + ? = ۱۰

۱۵ + ? = ۳ ‏ ‏ ‏ -۹ + ? = -۵

۱۲ + ? = ۶ ‏ ‏ ‏ ۸ + ? =

-۸ + ۶ = ۰   ۲ + ۶ = -۱۱

ج- تفریق عددهای جبری

۲۷- تعریف - چنانکه در حساب دیده ایم غرض از کم کردن عدد جبری b (کاسته یا مفروق) از عدد جبری a (کاهش یاب یا مفروق منه) پیدا کردن عدد یست جبری مانند d (مانده) که چون با b جمع جبری شود مجموع مساوی a شود.

و آنرا چنین نویسند $a - b = d$

این تعریف همانست که در حساب دیده ایم

مثال -

+۷ - (+۳) = +۴   زیرا   +۳ + (+۴) = +۷

+۳ - (+۷) = -۴   «   +۷ + (-۴) = +۳

-۹ - (-۶) = -۳   «   -۶ + (-۳) = -۹

-۱۹ - (+۱۱) = -۳۰   «   +۱۱ + (-۳۰) = -۱۹

+۱۱ - (-۱۹) = +۳۰   «   -۱۹ + (+۳۰) = +۱۱

پرسش های ساده و شفاهی

۱- هر یک از عددهای سمت راست را مطابق تعریف بالا از عدد سمت چپ کم کنید (یعنی در هر یک از مثالهای پائین عددی تعیین کنید که چون با کاسته جمع شود کاهش یاب بدست آید)

۵ از ۱۱   -۵ از ۱۱   ۱۱ از -۵

۳ از ۱   -۵ از ۵   ۵ از -۵

۲ از ۵   -۵ از -۵   ۶ از ۵

+۳ از ۵   -۱۵ از ۱۱   -۲ از ۰

۰ از -۳   ۰ از ۸   ۸ از ۰

۴- در مثالهای بالا نشانهٔ عدد کاسته را تغییر داده (یعنی اگر + است - و اگر - است + نموده) با کاهش یاب جمع کنید و در هر یک از مثالها تحقیق کنید که این مجموع مساوی تفاضل دو عدد مفروض است.

۲۸- موافق تعریف تفریق عدد d وقتی مساوی با ماندهٔ $a-b$ است که $b+d$ مساوی a باشد:

$$b+d=a$$

اگر بر دو طرف این تساوی قرینهٔ b (کاسته) را بیفزائیم نتیجه میشود

$$b+d+(-b)=a+(-b)$$

یا

$$d=a+(-b)$$

یعنی برای بدست آوردن d یا ماندهٔ $a-b$ کافیست با a (کاهش یاب) قرینهٔ b (کاسته) را جمع کنیم

ازینجا قاعدهٔ تفریق بدست آمد:

قاعده - برای تفریق دو عدد جبری کافیست قرینهٔ کاسته را با کاهش یاب جمع کنیم تا مانده بدست آید.

در قسمت ۲ پرسش های بالا مانده ها را از روی همین قاعده بدست آوردیم .

۲۹ - ازینجا معلوم میشود که در جبر عمل تفریق تبدیل به جمع میشود و بنا برین تفریق دو عدد جبری همواره ممکن بوده دارای هیچ شرطی نیست و در صورتیکه در حساب این عمل وقتی ممکن است که کاهش یابنده بزرگتر از کاسته یا دست کم مساوی آن باشد .

مثال -

$-۵ - (+۱۱) = -۵ + (-۱۱) = -۱۶$

$-۵ - (-۵) = -۵ + (+۵) = ۰$

$۰ - (+۳) = ۰ + (-۳) = -۳$

$۰ - (-۳) = ۰ + (+۳) = +۳$

پرسش های سادهٔ شفاهی

هر یک از عددهای سمت راست را موافق قاعدهٔ تفریق از عدد سمت چپ کم کنید .

۵ از ۱۱	-۵ از ۱۴	۹ از ۹
۳ از ۸	-۸ از ۳	۲٫۵ از ۳٫۵
$-\frac{۵}{۳}$ از $\frac{۵}{۳}$	-۹ از -۹	-۱۲ از -۱۴
۲٫۵ از ۰	$-۲٫۷۵$ از ۰	۰ از $-\frac{۱}{۳}$
$-\frac{۱}{۲}$ از $-\frac{۱}{۳}$	$-۱٫۲۵$ از ۲٫۷۵	$\frac{۱۱}{۵}$ از $-\frac{۲}{۵}$

۳۰ - چون مطابق قاعده های جمع و تفریق و از روی خط زینه دار ۱۸ عمل کنیم خواهیم داشت :

$$۵ + (+۲) = +۷ = ۵ + ۲$$

$$۲ + (-۵) = -۳ = ۲ - ۵$$

$$۵ - (+۲) = ۵ + (-۲) = ۳ = ۵ - ۲$$

$$-۷ - (-۱) = -۷ + (+۱) = -۶ = -۷ + ۱$$

$$۰ + (+۵) = +۵$$

$$۰ + (-۲) = -۲$$

$$۰ - (-۳) = ۰ + (+۳) = +۳$$

ازین چند مثالها قاعده زیر را نتیجه میگیریم :

۳۱ - قاعده - دو نشانه پی در پی را اگر یکی باشد میتوان حذف نموده بجای آنها یک نشانه + گذاشت و اگر دو نشانه پی در پی یکی نباشند میتوان بجای آنها یک نشانه − قرار داد

یعنی بطور کلی

$$+(+a) = +a$$

$$+(-a) = -a$$

$$-(+a) = -a$$

$$-(-a) = +a$$

پرسش های ساده شفاهی

۱ - در هر یک از تساویهای زیر بجای ؟ عددی بگذارید تا تساوی برقرار باشد

$-(+۲)-(-۴)=؟$ $\qquad$ $-(+۲)-(+۵)=؟$

$-(-۲)+(-۴)=؟$ $\qquad$ $-(-۲)-(-۴)=؟$

$-۵+؟=۰$ $\qquad$ $-(-۴)+(-۶)=؟$

$-۲+؟=۰$ $\qquad$ $۹-؟=۴$

$-۶-؟=-۶$ $\qquad$ $-۹+؟=-۹$

$-۴-؟=۰$ $\qquad$ $۱۲+؟=-۱۲$

۳۲- هرگاه بخواهیم چند عدد جبری را با یکدیگر جمع کنیم موافق قاعدهٔ بالا (۳۱) میبینیم کافیست آن عددها را با علامتهای خود دنبال هم بنویسیم مثلاً این مجموع را

$$-۲+(+۵)+(+۱)+(-۳)$$

میتوان چنین نوشت

$$-۲+۵+۱-۳$$

یعنی نشانه های جمع را نمی نویسیم و فایدهٔ این کار اختصار در نوشتن است

پس باید در نظر داشت هرگاه چند عدد جبری دنبال یکدیگر نوشته شده باشند مقصود اینست که باید آن عددها را با هم جمع نمود .

مثال ۱- $+۶+(-۱)+(-۴)=+۶-۱-۴=+۱$

مثال ۲- $۳-(-۴)+(-۸)=۳+(+۴)+(-۸)$

$$=۳+۴-۸=-۱$$

در مثال دوم قبلا عمل تفریق (۴-) - را مبدل بجمع نمودیم و پس از آن موافق قاعده بالا عددها را دنبال هم نوشتیم

پرسش های شفاهی

نشانه های جمع و تفریق بین عددهای جبری زیر را حذف نموده آنها را بصورت ساده بنویسید و حاصل هریک را بدست آورید

+ (-۲) + (-۵)　　　+ (-۷) - (-۴)

- (-۴) + (-۳)　　　- (-۵) - (-۱۱)

- ۲ + (-۳) - (-۴)　　　+ (-۳) - (-۳) + (-۱)

- ۴ + (-۱) - (+۲) - (-۳) - (-۶)

- (-۲) + (-۳) - (-۵) - (+۱۱)

۲ - (-۱) + (-۲) - (+۱) - (+۲)

۲۴ - چند جمله عددی - چند جمله عددی عبارتست از چند عدد جبری که بین آنها فقط نشانهٔ جمع (+) و تفریق (-) یا یکی از آنها باشد.

و چنانکه دیدیم هرچند جمله را میتوان بمجموع چند عدد جبری تبدیل نمود.

مثلا (۳-) - (۱+) + (۵+) - ۲- چند جمله ایست عددی و میتوان آنرا چنین نوشت

- ۲ - ۵ + ۱ + ۳

عددهای ۲- و ۵- و ۱+ و ۳+ را که باید با یکدیگر جمع نمود جمله های این

چندجمله‌ایم.

وهمچنین ط - ح + ج - ه چند جمله ایست که جمله های آن ه و ج - و ح و ط - میباشد

۳۴ - میخواهیم دو چند جمله ۱ + ۵ - ۲ - و ۶ - ۲ + ۳ را باهم جمع کنیم حاصل جمع را میتوان چنین نوشت

(۲- - ۵ + ۱) + (۳ + ۲ - ۶)

چون چند جمله اول مساوی ۶ - و دومی مساوی ۴ + است پس مجموع آن دو مساوی ۴ + ۶ - یعنی ۲ - است.

حال اگر جمله های این دو چند جمله را باهم جمع کنیم یعنی دو چند جمله را دنبال هم بنویسیم این چند جمله

۲- - ۵ + ۱ + ۳ + ۲ - ۶

بدست می آید که چون جمله های آنرا باهم جمع کنیم همان مجموع دو چند جمله بالا یعنی ۲ - حاصل میشود ازین مثال نتیجه میگیریم که:

برای جمع کردن چند جمله ها جمله های آنها را دنبال هم نوشته آنها را باهم جمع میکنیم (این قاعده عکس قسمت ب از بند ۲۴ است)

مثال -

(۵- + ۲ - ۹) + (۶- + ۳) = ۵- + ۲ - ۹ - ۶ + ۳ = ۱۵-

و) $(a-b)+(b-y-a)=a-b+b-y-a=-y$

۳۵- تعریف - هرگاه دو چند جمله S و S' دارای یک عده جمله بوده که دو بدو قرینه هم باشند این دو چند جمله را قرینه یکدیگر گویند مانند

$S=-۲+۳-۷$ و $S'=۲-۳+۷$

واضح است که مجموع دو چند جمله قرینه صفر است

۳۶- میخواهیم چند جمله ۴-۳+۲- را از چند جمله ۷+۵- تفریق کنیم تفاضل را میتوان چنین نوشت $(-۲+۳-۴)-(-۵+۷)$

چون حاصل کاهش یاب ۲+ و حاصل کاسته ۳- است پس تفاضل آنها مساوی (۳-)-۲ و یا ۳+۲ و یا ۵ میشود

حال اگر قرینه چند جمله کاسته را بر چند جمله کاهش یاب بیفزائیم همان تفاضل بالا بدست میآید

ازاینقرار :

$(-۵+۷)+(+۲-۳+۴)=+۲+۳=+۵$

ازین مثال نتیجه میگیریم که :

برای تعیین تفاضل دو چند جمله میتوان چند جمله کاهش یاب را بر قرینه چند جمله کاسته افزود

مثال -

$(-۳+۵-۷)-(-۲+۱۱-۱)=-۳+۵-۷+۲-۱۱+۱=-۱۳$

$(a-b)-(-b+y+a)=a-b+b-y-a=-y$

۳۷- برداشتن و گذاشتن پرانتز ها- از مطالب بالا معلوم میشود که:

اولاً میتوان پرانتزی را که در جلوی آن نشانهٔ + است حذف نمود در این صورت نباید نشانهٔ جمله های آن تغییر کند.

و اگر جلوی پرانتز نشانهٔ - باشد برای برداشتن پرانتز باید نشانهٔ جمله های داخل را تغییر داد

$(a+۴-b-۷)=a+۴-b-۷$

$-(a+۴-b-۷)=-a-۴+b+۷$

ثانیاً بالعکس- همواره میتوان یک چند جمله را درون پرانتزی که دارای نشانهٔ + است نوشت

و نیز میتوان نشانهٔ جمله های یک چند جمله را تغییر داده آنرا درون پرانتزی که دارای نشانهٔ - است بنویسیم مثلاً

$۳-۲+۵-۱۱+۷=$

$=(۳-۲+۵)+(-۱۱+۷)=-(-۳+۲-۵)-(۱۱-۷)$

$a-b+x-y=$

$=(a+x)-(b+y)=-(b-x)-(y-a)$

پرسش های ساده.

۱- مجموع و تفاضل چند جمله های $a+b$ و $a-b$ را حساب کنید

نتیجه:

$\begin{cases} a=15 \\ b=12 \end{cases}$ $\begin{cases} a=-1 \\ b=11 \end{cases}$ $\begin{cases} a=-5 \\ b=-6 \end{cases}$

$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=+7 \\ b=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} a=-10 \\ b=-1 \end{cases}$

۲- چند جمله‌ای زیر را بجمع و سپس بتفاضل دو پرانتز تبدیل کنید

$-a+b-c+d$ $-15+3-5+11$

$+4+a-4x-b$ $x-y-4+a+12$

$-20-a+y-m$ $-15+z-x+2$

تمرین

۱- حاصل هریک از عبارتهای زیر را بدست آورید

$(+18)+(-9)+(-11)-(-15)-(+3)$

$-(-40)-(+5)+(-7)-(-12)+(-15)$

$(-3)-[(+4)-(-2)+(-11)-(+7)]$

۲- بفرض $A=-3+4-2+1$ و $A'=-15+30+12-31$

و $A''=-3+12-27+11$ حساب کنید چند جمله‌ای $A+A'+A''$

و $A-A'+A''$ ، $A-(A'+A'')$ ، $A+A'-A''$ را

۳- چند جمله‌ای $a - b + c$ ، $a - (b + c)$ را در این حالت احساب کنید:

$a = +45$	$b = +2$	$c = +12$
$a = -45$	$b = -2$	$c = -12$
$a = +45$	$b = +7$	$c = -12$
$a = +45$	$b = -2$	$c = +12$
$a = -45$	$b = -7$	$c = +12$

۴- حاصل هریک از عبارتهای زیر را احساب کنید:

$$(4 - 7 + 4) + (18 - 5 - 21)$$

$$(-10 + 15 - 29) - (-25 + 11 - 15)$$

$$(-4 + 7 - 12) - (3 + 5 - 6 - 2) - (17 - 11 + 5)$$

$$(15 - 3 + 7) - (4 - 2 + 7) - 13$$

۵- ارشمیدس ۲۱۲ سال پیش از میلاد مرد و قیصر ۴۴ سال پیش از میلاد کشته شد و گالیله در ۱۶۴۲ پس از میلاد دلیلهای گردش زمین را انتشار داد و جلوس اعلیحضرت پهلوی در ۱۳۰۴ پس از هجرت است و اولین سنگ بنای دانشگاه تهران در سال ۱۳۱۳ پس از هجرت گذارده شد - اول هرکدام از این تاریخ ها را بعددهای جبری نمایند دوم تاریخ های میلادی را هجری و یا بالعکس تبدیل کنید سوم فاصلهٔ زمان این تاریخها را دو بدو بدست آورید.

۶- وقتیکه تهران ظهر است در پاریس ۳ ساعت و ۱۷ دقیقه بظهر مانده است معلوم کنید ۲ ساعت بعدازظهر

ظهر پاریس مطابق چه ساعتی از ظهر تهران است و همچنین ساعت ۱۱ بعد از ظهر تهران مطابق چه ساعتی در پاریس است.

۷- شخصی در ماه اول ۵۰ ریال در صندوق پس انداز میگذارد و در ماه دوم ده ریال کمتر و در ماه سوم ده ریال از ماه پیش کمتر پس انداز میکند و این کار را تا مدت ۹ ماه میکند اول مبلغ پس انداز این شخص را در هر ماه معین کنید (و پس انداز منفی را تعبیر کنید) دوم مبلغ کل پس انداز را برای مدت ۹ ماه بدست آورید.

۸- ارشمیدس حکیم ریاضی دان در سال ۲۸۷ پیش از میلاد متولد شده و در سال ۲۱۲ پیش از میلاد درگذشت حساب کنید چند سال زندگی کرده است

۹- خانه جمشید و خانه خسرو و مدرسه آنها در کوچه راستی واقع است فاصله خانه جمشید از مدرسه ۵۰۰ قدم و فاصله خانه خسرو از خانه جمشید ۴/۵ [illegible] قدم است تعیین کنید فاصله خانه خسرو را از مدرسه. این مسئله چند جواب دارد؟

۱۰- در مسئله بالا بطور کلی اگر فاصله خانه جمشید از خانه خسرو a قدم باشد و خانه جمشید b قدم از مدرسه فاصله داشته باشد معین کنید فاصله خانه خسرو را از مدرسه در حالتهای مختلف.

۱۱- دبیرستانی در کوچه راستی واقع است داریوش و ایرج از این مدرسه بکوچه میآیند اولی a متر و دومی b متر راه میرود و فرض اینکه a و b دو عدد جبری باشند اول فاصله این دو نفر را حساب کنید دوم مقدارهای جبری a و b تابع چه شرطی باشند تا این دو نفر در یک طرف مدرسه واقع [illegible] و یا آنکه مدرسه بین آنها باشد سوم اگر مجموع جبری راه [illegible] رفته باشند صفر باشد چه نتیجه میگیرید در این حال فاصله آنها چقدر خواهد بود؟

۱۲- گرما سنجی را در دو آبگون داخل کردیم در اولی ۱۵ درجه و در دومی ۲۷- درجه نشان داده است اختلاف حرارت این دو آبگون چقدر است؟

۱۳- درجهٔ صفر گرماسنجی بغلط معین شده است بقسمی که درجهٔ صفرش مطابق ۳ درجه بالای صفر است اگر این گرماسنج درجه‌های ۲۵+ و ۶۳+ و ۵+ و ۳- و ۱۵- را نشان دهد مقدار حقیقی این درجه‌ها چند است؟

۱۴- اگر صفر گرماسنجی مطابق چهار درجه زیر صفر باشد در این گرماسنج مقدار حقیقی ۴ و ۷۵ و ۱۲۰ و ۲- و ۲۰- و ۴۳- را معلوم کنید

۱۵- دو مدرسه که در بازی فوتبال مدرسه‌ها شرکت کرده بودند پس از تمام شدن مسابقه‌ها اولی ۸ دفعه برده بود و ۵ دفعه هیچ بهیچ شده و ۳ دفعه باخته است دومی ۷ دفعه برده و ۳ دفعه هیچ بهیچ شده و ۵ دفعه باخته است اگر بهر دفعه بردی یک یکه داده شود و برای هر دفعه باخت یک یکه کم شود نتیجه مسابقه‌های هر یک از دو مدرسه را معین کنید.

۱۶- پدری در موقع تولد پسر بزرگش ۲۱ سال دارد و در موقع تولد دخترش ۲۷ سال از سنش گذشته است معین کنید سن دختر را وقتیکه سن پسرش سی سال میشود.

۱۷- ساعت جمشید ۱۰ دقیقه جلوتر از ساعت دبیرستان است و ساعت دبیرستان ۵ دقیقه از ساعت شهرداری عقب است اگر ساعت شهرداری ظهر را نشان دهد ساعت جمشید و ساعت دبیرستان هر یک چه وقتی را معین میکنند؟

۱۸- در شهری سه ساعت است شخصی و ظهر گردش می بیند که هر سه ساعت یکموقع را نشان میدهند و حال آنکه از ساعت اول تا ساعت دوم ۱۵ دقیقه در راه بوده و از ساعت دوم تا ساعت سوم ۱۱ دقیقه راه پیموده است و ساعت خود او ۱۸ دقیقه از ساعت سومی عقب است اگر ساعت دوم صحیح باشد هر یک از این ساعتها

چه تغییری باید داد؟

۱۹- شخصی به پیشواز یکی از دوستان ۱۳ دقیقه پیش از رسیدن ترن وارد ایستگاه راه آهن شد؛ خبر دادند که ترن ۲۷ دقیقه دیرتر از موقع مقرر خواهد رسید اگر ترن میتوانست ۱۲ دقیقه زودتر برسد چند دقیقه باید منتظر شود؟

۲۰- ترنی از ایستگاه با ۲۰۰ نفر مسافر درجهٔ اول و ۸۵ مسافر درجهٔ دوم و ۱۱۵ مسافر درجهٔ سوم حرکت میکند در اولین ایستگاه از درجهٔ اول ۵ نفر و از درجهٔ دوم ۲۷ نفر و از درجهٔ سوم ۴۰ نفر خارج میشوند؛ در عوض ۸ مسافر درجهٔ اول و ۱۵ مسافر درجهٔ دوم و ۴۴ مسافر درجهٔ سوم سوار میشوند در ایستگاه دوم از این سه درجه بترتیب ۱۹ و ۴۸ و ۵۹ نفر پائین میآیند و ۴ نفر درجهٔ اول و ۱۵ نفر درجهٔ دوم و ۲۹ نفر درجهٔ سوم سوار میشوند و در ایستگاه سوم همه خارج میشوند معین کنید در ایستگاه سوم از هر درجه چند نفر خارج شده است؟

۲۱- نخستین دانشمندی که کتاب جبر و مقابله نوشته محمد پسر موسی خوارزمی است که ایرانی و بسال ۲۲۴ هجری قمری فوت کرده است و نخستین اروپائی که جبر را بصورت کنونی درآورده دکارت Descartes فرانسوی است که در ۱۵۹۶ بدنیا آمده معلوم کنید اولاً چند سال پیش از علمای اروپائی یکنفر ایرانی جبر و مقابله را نوشته ثانیاً چند سال پیش خوارزمی میزیسته؟

د- ضرب عددهای جبری

۳۸- در حساب مقصود از ضرب عدد a در b جمع عددهائی است که هریک مساوی a بوده و شمارهٔ آن عددها باندازهٔ شمارهٔ یکه های b باشد.

مانند ۲ × ۴ یعنی ۴ + ۴ یا ۸

ما این تعریف را در ضرب عددهای جبری عمومیت میدهیم ازین قرار:

در جبر مقصود از ضرب عدد مثبت در عدد جبری a جمع عددهائیست که هریک مساوی a بوده و شمارهٔ آنها باندازه شمارهٔ یکه های قدر مطلق آن عدد مثبت باشد

و مقصود از ضرب عدد منفی در عدد جبری a تفریق کردن عددهائیست که هریک مساوی a بوده و شمارهٔ آنها باندازهٔ شمارهٔ یکه های قدر مطلق آن عدد منفی باشد

مثال ۱ـ مقصود از (۲+) . (۴+) جسمع عدد ۴+ است دو مرتبه.

بنابراین

$$(+۴) \cdot (+۲) = (+۴) + (+۴) = +۸ = +(۴ \times ۲)$$

مثال ۲ـ مقصود از (۲+) . (۴-) جسمع عدد ۴- است دو مرتبه.

بنابراین

$$(-۴) \cdot (+۲) = (-۴) + (-۴) = -۸ = -(۴ \times ۲)$$

مثال ۳ـ مقصود از (۲-) . (۴+) تفریق عدد ۴+ است دو مرتبه.

بنابراین $(+۴) \cdot (-۲) = -(+۴) - (+۴) = -۸ = -(۴ \times ۲)$

مثال ۴ـ مقصود از (۲-) . (۴-) تفریق ۴- است دو مرتبه.

بنابراین

$$(-۴) \cdot (-۲) = -(-۴) - (-۴) = +۸ = +(۴ \times ۲)$$

ازین چند مثال این قاعدهٔ کلی برای ضرب دو عدد جبری بدست میآید :

۳۹- قاعده - حاصل ضرب دو عدد جبری عددیست جبری که قدر مطلقش مساوی حاصل ضرب قدر مطلقهای آند و عدد میباشد نشانه اش + است وقتی که آن دو عدد هم نشانه باشند وگرنه − است.

ازروی قاعدهٔ بالا نشانهٔ حاصل ضرب بطور خلاصه چنین است :

+	در	+	=	+
−	در	+	=	−
+	در	−	=	−
−	در	−	=	+

هریک از دو عددی را که در هم ضرب میشوند سازه مینامند

۴۰- نتیجه - از فقرهٔ ۳۸ معلوم میشود که حاصل جمع n سازهٔ مساوی برابر حاصل ضرب عدد n است در آن سازه

$(-x) + (-x) + (-x) = (-x) \cdot ۳$

مثال در تحقیق درستی قاعدهٔ بالا - اتومبیلی بر جادهٔ راست $x'x$ در هر ساعت ۳۰ کیلومتر راه می پیماید و ظهر بنقطهٔ o میرسد میخواهیم موضع این اتومبیل را روی این جاده دو ساعت پیش از ظهر یا دو ساعت بعد از ظهر معین کنیم یعنی بوسیلهٔ عددی جبری

هم فاصلهٔ اتومبیل را از O بدست بیاوریم و هم معین کنیم در کدام طرف O واقع است.

x ———— A . ———— O ———— B ———— x

معلوم است فاصلهٔ اتومبیل از O ۶۰ کیلومتر است باید معلوم کنیم در کدام سمت O واقع است

قبلاً قرارداد میکنیم که راههای پیموده شده بسوی راست مثبت و راههای پیموده شده بسوی چپ منفی باشد و همچنین زمانهای پیش از ظهر را منفی و زمان بعد از ظهر را مثبت اختیار میکنیم و هر ۳۰ کیلومتر را روی خط xx' بیک سانتی متر نشان میدهیم و دو حالت در نظر میگیریم:

حالت اول اتومبیل بسوی راست میرود - بنابرین راهیکه در یکساعت می پیماید عددیست مثبت مساوی ۳۰+ و چون ظهر به O میرسد پس دو ساعت پیش از ظهر بوضع A در طرف چپ O بفاصلهٔ ۳۰×۲ رسیده است حال اگر اندازهٔ جبری OA را به $\overline{OA}$ بنامیم نتیجه میشود $\overline{OA} = -۶۰$ کیلومتر

و چون ظهر به O رسیده و پس در دو ساعت بعد از ظهر به نقطهٔ B که بفاصلهٔ ۶۰ کیلومتر از O و در طرف راست آنست میرسد یعنی $\overline{OB} = +۶۰$ کیلومتر

اگر بطور کلی برای بدست آوردن راهیکه متحرک پیموده دستور $e = vt$ (نمرهٔ ۹ قسمت ب) را بکار بریم و در آن v و t و e را عددهای جبری بگیریم نتیجهٔ بالا را بدست میآوریم از اینقرار:

در دو ساعت پیش از ظهر خواهیم داشت

$$e = \overline{OA} = (+۳۰) \cdot (-۲) = -۶۰ \text{ کیلومتر}$$

و در دو ساعت بعد از ظهر

$e = \overline{OB} = (+۳۰) \cdot (+۲) = +۶۰$ کیلومتر

حالت دوم اتوبیل بسوی چپ میرود ـ بنا برین راهیکه در یکساعت می پیماید عددیست منفی مساوی ۳۰ ـ پس در دو ساعت پیش از ظهر بوضع B در طرف راست O و بفاصله ۶۰ کیلومتر واقع است یعنی $\overline{OB} = +۶۰$ کیلومتر

و در دو ساعت بعد از ظهر به A که در سمت چپ O و بفاصله ۶۰ کیلومتر است رسیده یعنی

$\overline{OA} = -۶۰$ کیلومتر

از روی دستور هم همین نتیجه گرفته میشود:

در دو ساعت پیش از ظهر

$e = \overline{OB} = (-۳۰) \cdot (-۲) = +۶۰$ کیلومتر

و در دو ساعت بعد از ظهر

$e = \overline{OA} = (-۳۰) \cdot (+۲) = -۶۰$ کیلومتر

پرسش های ساده

حاصل ضربهای زیر را حساب کنید

+۵ در +۷ ؛ +۶ در -۴ ؛ +۹ در -۱۱

-۵ در -۲ ؛ -۵ در ۱٫۶ ؛ -۹ در ۰

-x در ۱۱ ؛ -α در -۵ ؛ ۰ در -۲

-۱ در ۸   -۱ در -۸   ۱ در ۱۲

۱ ، -۱۱   -۱ ، -۱٫۵   -۱ ، +۱٫۵

۱۶۱- تحقیق کنید که این تساویها برقرار است .

$$(+۳)(+۵) = (+۵)(+۳)$$

$$(+۴)(-۷) = (-۷)(+۴)$$

$$(-۲)(+۶) = (+۶)(-۲)$$

$$(-۸)(-۴) = (-۴)(-۸)$$

از اینجا معلوم میشود :

حاصل ضرب دو عدد جبری بستگی بجای آن دو عدد ندارد .

یعنی بطور کلی $ab = ba$

۱۶۲- از اینکه قدر مطلق حاصل ضرب مساوی حاصل ضرب قدر مطلقهای سازه های ضرب است

نتیجه میشود که :

حاصل ضرب هر عدد در صفر مساوی صفر است

یعنی $0 \times a = a \times 0 = 0$

و بعکس هرگاه حاصلضرب صفر باشد حتما یکی از سازه های آن صفر است .

بنابرین : شرط لازم و کافی برای اینکه حاصلضربی صفر باشد اینست که دست کم یکی از سازه های آن صفر باشد

وهمچنین از ضرب هر عدد در ۱- قرینهٔ آن عدد بدست میآید و بعکس هر عدد مساوی حاصل ضرب ۱- در قرینهٔ آن عدد است .

یعنی

$$-1 \times x = x \times (-1) = -x$$

۴۳- تحقیق کنید این تساویها برقرار است .

$$(+۳)\cdot(+۵) = -\left[(-۳)(+۵)\right] = -\left[(+۳)(-۵)\right]$$

$$(-۴)(+۷) = -\left[(+۴)(+۷)\right] = -\left[(-۴)(-۷)\right]$$

$$(-۲)(-۹) = -\left[(+۲)(-۹)\right] = -\left[(-۲)(+۹)\right]$$

$$(-۶)(+۱۱) = (+۶)(-۱۱)$$

$$(-۵)(-۲) = (+۵)(+۲)$$

از اینجا معلوم میشود که :

اگر نشانهٔ یکی از دو سازه تغییر کند نشانهٔ حاصل ضرب تغییر میکند

یعنی بطور کلی

$$xy = -\left[(-x)y\right] = -\left[x(-y)\right]$$

بنابراین اگر نشانه هر دو سازه تغییر کند نشانهٔ حاصل ضرب تغییر نمیکند

یعنی

$$xy = (-x)(-y)$$

۴۴- حاصل ضرب چند عدد جبری - حاصل ضرب چند عدد جبری بدین شکل بدست میآید که دو سازهٔ اول و دوم را در هم ضرب نموده حاصل را در سازهٔ سوم ضرب میکنیم و این حاصل ضرب را در سازهٔ چهارم و بهمین ترتیب عمل می کنیم تا حاصل ضرب این چند عدد بدست آید

مثال-

$$(-4)(+2)(-5) = (-8)(-5) = +40$$

$$(+3)(-2)(+7)(+5) = (-6)(+7)(+5)$$

$$= (-42)(+5) = -210$$

پرسش های ساده

حاصل ضرب های زیر را بدست آورید

$(+2)(+3)(+1)$ $\qquad$ $(-2)(-3)(-1)$

$(-3)(+5)(-2)$ $\qquad$ $(-1)(-7)(-3)(-1)$

$(-2)(-9)(-5)(+1)$ $\qquad$ $(+2)(-1)(-5)(+1)$

$(-5)(+4)(-3)(+1)(0)$ $\qquad$ $(-1)(+7)(-11)(0)(-8)$

۴۵- در هریک از مثالهای بالا تحقیق کنید که اگر جای سازه های ضرب را تغییر دهیم حاصل ضرب تغییر نمیکند

۴۶- از مثالهای بالا معلوم میشود که اگر شمارهٔ سازه های منفی جفت یا صفر باشد نشانهٔ حاصل ضرب + است وگرنه نشانه - است.

از دو خاصیت بالا قاعدهٔ زیر برای ضرب چند عدد جبری نتیجه میشود:

قاعده - حاصل ضرب چند عدد جبری عدد یست جبری که قدر مطلقش مساوی حاصل ضرب قدر مطلقهای آن چند عدد بوده و نشانه اش + است اگر شمارهٔ سازه های منفی جفت و یا صفر باشد وگرنه

- خواهد بود

۴۷- نتیجه - هرگاه یکی از سازه ها صفر باشد حاصل ضرب صفر میشود

۴۸- تحقیق کنید که تساویهای زیر درست است .

$$[(-2)(+5)]\cdot(+3) = [(-2)(+3)]\cdot(+5)$$
$$= [(+5)(+3)]\cdot(-2)$$

$$[(-1)(-4)(+2)](-7) = [(-1)(-7)]\;(-4)(+2)$$
$$= [(-4)(-7)]\;(-1)(+2)$$
$$= [(+2)(-7)]\;(-4)(-1)$$

از اینجا نتیجه میگیریم که برای ضرب یکعدد در حاصل ضرب چند عدد کافی است آنعدد را در یکی از آن چند عدد ضرب کرده و از روی قاعدهٔ بالا حاصل ضرب را بدست آورد

یعنی $(abc)x = (ax)bc = (bx)ac = (cx)ab$

پرسش های ساده

حاصل ضربهای زیر را حساب کنید

ab وقتی که $a=-2$ و $b=-5$ باشد

abc ، $a=+2$ و $b=-3$ ، $c=0$

$5xy$ ، $x=-5$ و $y=-2$

$-۳axy$ وقتی که $a = ۱$ ، $x = -۲$ ، $y = -۴$

" ، $a = -۱$ ، $x = +۲$ ، $y = +۳$

" ، $a = +۱$ ، $x = +۲$ ، $y = +۳$

" ، $a = -۲$ ، $x = ۰$ ، $y = ۰$

۴۹- اول معنای این تساویها را بیان کنید

$$۵(-۲ + ۴) = ۵(-۲) + ۵(+۴)$$

$$-۳(-۱+۲-۴) = (-۳)(-۱) + (-۳)(+۲) + (-۳)(-۴)$$

$$(-۵-۲+۷)(-۹) = (-۵)(-۹) + (-۲)(-۹) + (+۷)(-۹)$$

دوم تحقیق کنید که تساویهای بالا درست است

از مثالهای بالا چنین برمیآید:

برای تعیین حاصل ضرب یک عدد جبری در مجموع چند عدد میتوان آن عدد جبری را در هر یک از جمله های مجموع ضرب نموده حاصل ضربهای جزء را باهم جمع جبری نمود.

یعنی $(a-b+c)m = am - bm + cm$

۵۰- میخواهیم مجموع جبری $(۳-۴)$ را در مجموع جبری $(-۲ + ۵ - ۱)$ ضرب کنیم

مستقیماً این حاصل ضرب مساوی حاصل ضرب ۱- در ۲+ است که مساوی ۲- میباشد

نیز میتوان یکی از این دو مجموع (مثلاً مجموع دوم) را یک عدد فرض نموده مطابق نمرهٔ ۴۹ ضرب

گرد از نیقرار :

$$(-2+5-1)(3-4)=(-2+5-1)(+3)+(-2+5-1)(-4)$$

طرف دوم را نیز میتوان مطابق قرار ۲۹ بسط داد بنابرین حاصل ضرب چنین میشود

$$(-2+5-1)(3-4)=$$

$$(-2)(+3)+(+5)(+3)+(-1)(+3)+(-2)(-4)+(+5)(-4)+(-1)(-4)=$$

$$-6+15-3+8-20+4=$$

$$=-29+27=-2$$

وهمچنین

$$(a+b-c)(x-y)=(a+b-c)x+(a+b-c)(-y)$$

$$=ax+bx-cx-ay-by+cy$$

پرسش های ساده

۱ـ حاصل ضربهای زیر را از دو راه بدست آورید

$-5(a+b)$ وقتیکه $a=-2$ و $b=-1$ باشد

$x(a-b)$ » $x=-1$ و $a=2$ و $b=-4$

$x(a+b-4)$ » » و » » »

$-12(x-y)(-a)$ » $x=2$ و $y=-1$ و $a=-3$

$(a-b)(a+b)$ » $a=2$ و $b=-4$ باشد

$(a-b)(a+b)$ وقتیکه $a=2$ ، $b=-2$

〃 $a=-2$ ، $b=2$

$5(a+b-1)(x-y)$ 〃 $a=1$ ، $b=-1$ ، $x=2$ ، $y=-1$

〃 $a=0$ ، $b=0$ ، $x=0$ ، $y=1$

۲- دو مسافر از شهری با تندیهای ۵ر۸ کیلومتر در ساعت و ۲۵ر۱۰ کیلومتر در ساعت حرکت میکنند میخواهیم فاصلهٔ آنها را پس از مدت ۲ ساعت و ۲۵ دقیقه حساب کنیم درصورتیکه اولاً در جهت ثانیاً در دو جهت مختلف حرکت کنند

ه- تقسیم دو عدد جبری

۵۱- غرض از تقسیم عدد جبری a (مقسوم) بر عدد جبری b (مقسوم علیه) پیدا کردن عددیست جبری مانند q (خارج قسمت) بطوریکه حاصل ضرب b و q مساوی a شود و آنرا چنین نویسیم

$$\frac{a}{b} = a : b = q$$

بنا بتعریف بالا معلوم میشود که $a = bq$

مثال

$\frac{+8}{+4} = +2$ زیرا $+8 = (+2)(+4)$

$\frac{+10}{-2} = -5$ 〃 $+10 = (-2)(-5)$

$\frac{-12}{+4} = -3$ 〃 $-12 = (+4)(-3)$

$+4 = \frac{-24}{-6}$ زیرا $-24 = (-6)(+4)$

پرسش های ساده

خارج قسمت های زیر را حساب کنید

۹ بر ۳ ; ۹ بر -3 ; -9 بر ۳

$-15 \div -5$; $+15 \div -5$; $-15 \div +5$

$+36 \div -9$; $-36 \div -9$; $-36 \div +9$

$-a \div b$; $-a \div -b$; $a \div -b$

$x \div -1$; $1 \div -x$; $-1 \div -1,5$

۵۴- از مثالهای بالا معلوم میشود:

اولاً قدر مطلق خارج قسمت مساوی خارج قسمت قدر مطلق مقسوم بر قدر مطلق مقسوم علیه است

ثانیاً نشانه خارج قسمت + است وقتی که مقسوم و مقسوم علیه هم نشانه (هر دو مثبت یا هر دو منفی)

باشند و - است وقتی که دارای دو نشانه مختلف (یکی مثبت و دیگری منفی) باشند

و نیز میتوان از روی تساوی $bq = a$ همین نتیجه را گرفت:

اگر a و b دارای یک نشانه باشند نشانه q باید + باشد تا نشانه حاصل ضرب یعنی bq

همان نشانه a شود و اگر نشانه a و b یکی نباشد بهمین دلیل باید q منفی باشد

بنابرین برای تقسیم دو عدد جبری این قاعده را خواهیم داشت:

قاعده - خارج قسمت عدد جبری a بر عدد جبری b عددیست

جبری مانند q بقسمی که قدر مطلقش مساوی خارج قسمت قدر مطلق مقسوم a بر قدر مطلق مقسوم علیه b باشد و نشانه اش + است اگر مقسوم و مقسوم علیه هم نشانه باشند وگرنه ـ است.

برای یافتن نشانهٔ خارج قسمت از روی قاعدهٔ بالا بطور خلاصه میتوان نوشت:

+	تقسیم بر	+	=	+
+	٥	بر	−	=	−
−	٥	بر	+	=	−
−	٥	بر	−	=	+

۵۳ ـ حالتهای مخصوص ـ نخست ـ اگر مقسوم علیه مساوی +۱ باشد خارج قسمت مساوی مقسوم میشود بعبارت دیگر خارج قسمت هر عدد بر یک مساوی خود آنعدد است

یعنی $a : +1 = \frac{a}{+1} = a$.

دوّم ـ اگر مقسوم مساوی صفر و مقسوم علیه مخالف صفر باشد خارج قسمت صفر میشود

زیرا از تساوی $bq = a$ معلوم میشود که هرگاه $a = 0$ و $b \neq 0$ باشد

چون طرف اوّل صفر است ناچار طرف دوّم نیز مساوی صفر بوده و از آنجا q باید صفر باشد

سوّم ـ اگر مقسوم علیه صفر و مقسوم مخالف صفر باشد تقسیم محال است

زیرا خارج قسمت را هر عددی فرض کنیم چون حاصل ضربش در صفر مساوی صفر میشود بنابراین نمیتواند مساوی مقسوم که صفر نیست باشد.

تبصره - از تساویهای $2=\frac{2}{1}$ و $20=\frac{2}{0/1}$ و $200=\frac{2}{0/01}$ و ... معلوم می‌شود که هرچه قدر مطلق مقسوم علیه کوچک شود قدر مطلق خارج قسمت بزرگ میشود و چون قدر مطلق صفر از قدر مطلق تمام عددها کوچکتر است بنابراین قدر مطلق خارج قسمت هر عدد بر صفر از قدر مطلق تمام عددها بزرگتر میشود و چون چنین عددی را نمیتوان معین کرد آنرا بعلامت ∞ نمایش داده اند و آنرا بی نهایت گویند.

۵۴ - عکس یک عدد - عکس یک عدد مساوی خارج قسمت ۱+ است بر آن عدد

چنانکه عکس عدد ۴- عدد $-\frac{1}{4}$ است و بطور کلی $\frac{1}{a}$ عکس عدد a میباشد

از روی این تعریف معلوم میشود که:

حاصل ضرب هر عدد در عکس خود مساوی ۱+ است

۵۵ - درستی تساویهای زیر را تحقیق کنید

$$\frac{-20\times 4}{5}=\frac{-20}{5}\times 4 \quad \text{و} \quad \frac{-24\times 3}{8}=\frac{-24}{8}\times 3$$

$$\frac{-36:(-3)}{-4}=\frac{-36}{-4}:(-3) \quad \text{و} \quad \frac{+18:(-2)}{-3}=\frac{+18}{-3}:(-2)$$

$$\frac{-40}{4\times(-5)}=\frac{-40}{4}:(-5) \quad \text{و} \quad \frac{48}{(-6)\times 2}=\frac{48}{-6}:2$$

$$\frac{-36}{-12:3}=\frac{-36}{-12}\times 3 \quad \text{و} \quad \frac{-27}{(-9):(-3)}=\frac{-27}{-9}\times(-3)$$

$$\frac{-12\times(-3)}{-6(-3)}=\frac{-12}{-6} \quad \text{و} \quad \frac{+30:2}{-54:2}=\frac{+30}{-54}$$

از این تساویها میتوان خاصیت های زیر را نوشت:

۵۶ - نخست - هرگاه مقسوم در عددی ضرب شود خارج قسمت در آن عدد ضرب میشود

۵۷ - دوّم - هرگاه مقسوم بر عددی تقسیم شود خارج قسمت بر آن عدد تقسیم میشود

۵۸ - سوّم - هرگاه مقسوم علیه در عددی ضرب شود خارج قسمت برآن عدد تقسیم میشود

۵۹ - چهارم - هرگاه مقسوم علیه بر عددی تقسیم شود خارج قسمت در آنعدد ضرب میشود

۶۰ - پنجم - هرگاه مقسوم و مقسوم علیه در عددی ضرب و یا بر عددی تقسیم شوند خارج قسمت تغییر نمیکند .

۶۱ - معنای این تساویها را بگوئید و تحقیق کنید که هر یک درست است :

$$(\text{۸} + \text{۱۲} - \text{۲۰}) : (-\text{۴}) = \frac{-\text{۸}}{-\text{۴}} + \frac{+\text{۱۲}}{-\text{۴}} + \frac{-\text{۲۰}}{-\text{۴}}$$

$$(\text{۹} - \text{۱۸} - \text{۱۲}) : (+\text{۳}) = \frac{+\text{۹}}{+\text{۳}} + \frac{-\text{۱۸}}{+\text{۳}} + \frac{-\text{۱۲}}{+\text{۳}}$$

ازین تساویها معلوم میشود که :

در تقسیم مجموع جبری چند عدد بر یک عدد میتوان هر یک از جمله های آن مجموع را بر آن عدد تقسیم نمود و خارج قسمت های جزء را جمع کرد

بطور کلی میتوان نوشت :

$$(a+b+c):m = \frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}$$

زیرا از ضرب این خارج قسمت در m مقسوم بدست میآید:

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right)\times m = \frac{a}{m}\times m+\frac{b}{m}\times m+\frac{c}{m}\times m$$

$$= a+b+c$$

($\frac{a}{m}\times m$ مساوی a است زیرا $\frac{a}{m}$ خارج قسمت تقسیم a بر m است همینطور $\frac{b}{m}\times m=b$ و .....)

۶۴ـ تحقیق کنید که تساویهای زیر درست است:

$$(-۳\times ۲\times -۱۲):(-۴) = (-۳\times ۲)\times\frac{-۱۲}{-۴} = -۳\times ۲\times ۳$$

$$(-۴\times -۲۰\times -۷):(+۵) = (-۴\times -۷)\times\frac{-۲۰}{+۵} = -۴\times -۷\times -۴$$

یعنی: برای تعیین خارج قسمت حاصل ضرب چند عدد جبری بر یک عدد جبری a میتوان یکی از آن عددها را بر a تقسیم نموده خارج قسمت را در حاصل ضرب سایر عددها ضرب نمود

$$\frac{bcd}{a} = \frac{b}{a}\times cd = \frac{c}{a}\times bd = \frac{d}{a}\times bc$$

یادآوری ـ $\frac{-۸\times ۱۲\times ۲۰}{-۴}$ را نمیتوان چنین نوشت:

$$\frac{-۸}{-۴}\times\frac{۱۲}{-۴}\times\frac{۲۰}{-۴}$$

زیرا موافق قاعدهٔ بالا باید یکی از سازه‌ها بر ۴ـ تقسیم شود نه همهٔ آنها

و ـ نامساویهای عددی

۳۶- وقتی گویند عدد جبری a بزرگتر از عدد جبری b است (b < a) که a - b مثبت باشد و در غیر اینحالت b > a میباشد.

مثلاً چون تفاضل ۷ + = (۲-) - (۵+) مثبت است بنابرین ۲- < ۵+

-۲ > -۳ بنابرین منفی است (-۲) - (-۳) = -۴ . .

ازین تعریف نتیجه های زیر بدست میآید:

۴۶- نخست - هر عدد مثبت از صفر بزرگتر است و هر عدد منفی از صفر کوچکتر است

دوم - هر عدد مثبت بزرگتر از هر عدد منفی است

سوم - از دو عدد منفی آنکه قدر مطلقش بزرگتر است کوچکتر میباشد

زیرا هرگاه دو عدد a و b منفی باشند و بفرض اینکه |a| < |b| باشد لازم میآید

که b - a منفی باشد بنابرین b > a خواهد بود

نتیجه - رشتهٔ اعداد صحیح جبری بترتیب کوچکی و بزرگی چنین است

.....۴ , ۳ , ۲ , ۱ , ۰ , ۱- , ۲- , ۳- , ۴-.....

چهارم - میتوان بر دو طرف یک نامساوی مقداری افزود یا از دو طرف مقداری کاست بدون اینکه جهت نامساوی تغییر کند یعنی طرفی که بزرگتر بوده بزرگتر میماند

بفرض b < a میتوان بدو طرف مقدار جبری c را افزود درینصورت خواهیم داشت

b+c > a+c زیرا تفاضل b - a ثابت میماند

پنجم ـ میتوان دو طرف نامساوی را در عدد مثبت ضرب نمود بدون اینکه جهت نامساوی تغییر کند

۵ > ۷- از ضرب دو طرف در ۳ نتیجه میشود ۱۵ > ۲۱- زیرا تفاضل منفی است

ششم ـ چون دو طرف نامساوی در عدد منفی ضرب شود جهت نامساوی تغییر میکند (یعنی اگر طرف اول بزرگتر است کوچکتر از طرف دوم میشود و اگر کوچکتر است بزرگتر میگردد)

۷ > ۲- از ضرب دو طرف در ۳- نتیجه میشود ۲۱- < ۶

تمرین ها

۱- حاصل ضربهای ab و abc را درین حالات حساب کنید:

b=۴ ; a=-۸ و b=۱۰ ; a=-۵ و b=-۹ ; a=+۵

a=b=-۱۰ و c=۱۲ ; b=-۱۵ و a=۵ و b=-۱۲ ; a=-۲۰

a=b=c=-۷ و c=-۸

۲- (x+y)(x-y) و (x-y-1)(3x+2y)(2x-y) را در هر یک ازین حالات حساب کنید

y=-۲ ; x=۵ و y=۷ ; x=۲ و y=-۴ ; x=۳

y=۴ ; x=-۱۲ و y=-۵ ; x=-۵ و y=-۸ ; x=-۷

۳- $(a+b)(c+d)$ و $(a-b)(c-d)$ را درین حالتها حساب کنید

$d = ۱۱$	$c = -۲۰$	$b = ۸$	$a = ۱۲$	
$d = ۳۰^{۳}$	$c = -۵۰$	$b = -۱۱$	$a = -۱۲$	و
$d = -۱۱$	$c = ۱۱$	$b = ۱۱$	$a = ۱۱$	و
$d = -۳$	$c = -۱۴$	$b = -۵$	$a = ۹۵$	و
$d = ,۲۵$	$c = -۱۵$	$b = -۸$	$a = -۴۰$	و

۴- عملهای زیر را انجام دهید و حاصل هریک را بدست آورید

$(-۲۱ + ۱۰ - ۱۵)(-۵) - (۷ - ۱۲)(-۳)$

$[(-۵ + ۱۱ - ۷) - (-۸ + ۱۱ - ۵)]\ (-۶ + ۱۲)$

$[(-۲۰ + ۱۰ - ۵) - (-۱۰ + ۴ - ۹)]\ [(۲۸ - ۱۵) - (۱۲ + ۷ - ۱)]$

۵- تحقیق کنید که تساویهای زیر درین حالتهای مخصوص درست است

$۴x - ۳ = ۲x - ۱۲$ وقتیکه $x = -۵$

$۳x - ۵ = ۲x + ۷$ » $x = ۱۲$

$۲x + ۳y = ۱۷ + ۱۰y$ » $\begin{cases} x = ۵ \\ y = -۱ \end{cases}$

$(x - y)(y - ۲) = ۲x -$ » $\begin{cases} x = ۳ \\ y = ۲ \end{cases}$

۶- عملهای زیر را انجام دهید و حاصل هر یک را بدست آورید

$(-۱۸+۳۵-۸) : (-۲+۷-۱۵)$

$-۱۱۷ : (۵-۳+۹+۲۰)$

$(-۲۱)(۴۹)(-۵۶) : (-۷)(-۳)$

$(۵-۲)(۷-۳) : (۴-۷)$

$[-۲۰+(+۲)(-۵)+۱۷-۱۲(-۲۵)] : (۱۰-۱۲)$

۷- حاصل $\frac{ab}{c}$ و $\frac{a-b}{c}$ را در حالتهای زیر بدست آورید

$a=-۱۵ \quad b=۵ \quad c=۲$

و $a=۲۴ \quad b=-۸ \quad c=-۶۰$

و $a=-۲ \quad b=۱۲ \quad c=۱۸$

و $a=-۴۸ \quad b=-۱۵ \quad c=-۳۰$

۸- تحقیق کنید که تساویهای زیر در این حالتها درست است

$x=-۹$ وقتیکه $\frac{x}{۳}+۲x=۶+۳x$

$\begin{cases} x=-۱۸ \\ y=-۲۸ \end{cases}$ و $\frac{x}{۱۸}-\frac{y}{۷}=۳$

۹- تحقیق کنید که آیا نامساویهای زیر در این حالتهای مخصوص درست است یا نه و نامساویهای نادرست را درست کنید

$۲x-۲ > (x-۳)(x-۷)$ وقتی که $x = ۲$

$۲x-۵ < \frac{x+۳}{x-۱}$. $x = ۵$

$a-b > \frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{a}$. $\left.\begin{matrix} a = ۵ \\ b = -۲ \end{matrix}\right\}$

$\frac{a+b}{a-b} > \frac{a-b}{a+b}$. $\left.\begin{matrix} a = ۳ \\ b = ۱ \end{matrix}\right\}$

$(a-b)(a+b) < ۲ab$. $\left.\begin{matrix} a = ۲ \\ b = ۱ \end{matrix}\right\}$

۱۰- اگر $b > a$ باشد ثابت کنید که

$$a < \frac{a+b}{۲} < b$$

۱۱- اگر a , b مثبت باشند ثابت کنید که

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq ۲$$

۱۲- ثابت کنید در چند نامساوی مجموع جبری طرفهای کوچکتر کوچکتر است از مجموع جبری طرفهای بزرگتر.

(بوسیله یک مثال عددی درستی این قضیه را نشان دهید)

۱۳- در دو نامساوی چون طرف کوچکتر نامساوی دوم را از طرف بزرگتر نامساوی اول و طرف بزرگتر

نامساوی دوم را از طرف کوچکتر نامساوی اول کم کنیم نتیجهٔ باقیمانده تشکیل یک نامساوی میدهد که جهتش موافق

نامساوی اول خواهد بود - از روی چند مثال عددی امتحان کنید

۱۴- در چند نامساوی که دارای یک جهت‌اند و دو طرف آنها مثبت است حاصل ضرب طرفهای بزرگتر
بزرگتر است از حاصل ضرب طرفهای کوچکتر (۱۴) از روی یک مثال عددی درستی این نکته را تحقیق کنید.

۱۵- نخستین بازیهای قهرمانی المپیک در سال ۷۷۶ پیش از میلاد مسیح شروع شد و تا سال ۳۹۶ پس از میلاد
دوام داشت میدانیم که این بازیها هر چهار سال یکبار تشکیل میشود در مدت چند بار بازی شده است؟- دوباره
در سال ۱۸۹۶ پس از میلاد بازیهای قهرمانی المپیک شروع شد بفرض اینکه انقطاعی حادث نشده باشد معلوم کنید
المپیک آخری (۱۹۳۷) که در برلن بوده چندمین آنها است.

۱۶- a کیلوگرم گوشت b ریال ارزش دارد قیمت d کیلوگرم آنرا حساب کنید (حالتهای مخصوص
$a=5$; $b=16$; $d=7$ همچنین $a=12$; $b=40$; $d=3$)

۱۷- کارگری پس از a روز کار b ریال مزد گرفته است معلوم کنید پس از ۱۵ روز کار چند ریال
مزد باید بگیرد؟ (حالتهای مخصوص $a=12$, $b=120$ همچنین $a=18$; $b=135$)

۱۸- پس انداز هفتگی پرویز a ریال بیش از خسرو است اما پرویز هفته‌ای ۳ ریال و خسرو هفته‌ای
۵ ریال پس انداز میکنند معلوم کنید پس از چند هفته دیگر هر دو دارای یک مبلغ پس انداز میشوند (در حالتهای
مخصوص $a=120$; $a=80$; $a=52$)

۱۹- اگر نقطهٔ واقع در درون مثلث را به سه رأس وصل کنیم سه مثلث تشکیل میشود که چون مساحت آنها را
S_1 و S_2 و S_3 فرض کنیم این دستور حاصل میشود $S = S_1 + S_2 + S_3$
(S مساحت مثلث مفروض است) برای S_1 و S_2 و S_3 اندازه‌های جبری مثبت و منفی را اختیار کنید
بطوریکه این دستور برای وقتی که نقطه بیرون مثلث باشد نیز صدق کند.

۲۰ـ همین مسئله را حل کنید وقتی که شکل چهار ضلعی باشد.

۲۱ـ فاصلهٔ ایرج و پرویز d قدم است ایرج هر دقیقه a قدم میدود و پرویز دقیقه‌ای دو قدم بیشتر میدود اگر هر دو یکمرتبه بدوند بطوریکه پرویز برای گرفتن ایرج حرکت کند (یعنی هر دو بیک سو بدوند) معلوم کنید پس از ۳ دقیقه و پس از ۵ دقیقه فاصلهٔ آنها چقدر میشود. (فرض میکنیم قدمهای ایرج و پرویز یک درازا باشد)

۲۲ـ در مسئلهٔ پیش اگر d = ۲۴ قدم باشد پس از ۱۵ دقیقه فاصلهٔ آنها چقدر میشود. جواب عددی است منفی معنای آن چیست؟

۲۳ـ در مسئلهٔ پیش وقتیکه فاصله d قدم است معین کنید پس از چند دقیقه پرویز ایرج را میگیرد؟

(حالتهای مخصوص: $d=۱۸$ ؛ $d=۴۸$ و $d=۶۰$)

ز ـ توان

۵۶ـ توان m ام عدد جبری a عبارتست از حاصل ضرب m عدد مساوی a و آنرا چنین نویسند a^m (میخوانند a بتوان m)

$$a^m = \overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}^{m \text{ مرتبه}}$$

a را پایه و m را که عدد صحیح و مثبتی است **نما** خوانند چنانکه توان پنجم ۲ـ چنین است

$$(-۲)^۵ = -۲ \times -۲ \times -۲ \times -۲ \times -۲ = -۳۲$$

و توان سوم ۵+ چنین میشود

$$(+۵)^۳ = +۵ \times +۵ \times +۵ = +۱۲۵$$

و توان چهارم ۳ـ چنین است

$$(-3)^4 = -3 \times -3 \times -3 \times -3 = +81$$

توان دوم و سوم یک عدد را بترتیب مربع و مکعب آن عدد نامند چنانکه مربع ۳- عدد ۹+ است و مکعب ۳- عدد ۲۷- است

پرسش های ساده

توان های زیر را حساب کنید

$(+5)^2$ $\quad (-2)^4$ $\quad (-2)^3$ $\quad 2^3$

$(-1)^5$ $\quad (-1)^3$ $\quad (-5)^4$ $\quad (-5)^3$

$(+1)^m$ $\quad (+1)^3$ $\quad (-1)^m$ $\quad (-1)^6$

^{m} $\quad ^2$ $\quad (-6)^2$ $\quad (-8)^2$

۶۶- چون توان حالت مخصوصی از ضرب است پس بنا بر قاعده نشانه ها (نمره ۴۶) چنین خواهیم داشت:

اگر عددی مثبت باشد توان m ام آن عدد نیز مثبت است و اگر پایه منفی باشد توان m ام آن مثبت است هرگاه m جفت باشد و منفی است اگر m تاق باشد

چنانکه

$$(+3)^4 = (-3)^4 = +81$$

و

$$(-2)^3 = -8$$

یادآوری - باید دانست که ma و a^m با یکدیگر تفاوت کلی دارند زیرا اولی عبارت

از حاصل جمع m عدد مساوی با a و دومی عبارت از حاصل ضرب m سازه مساوی با a میباشد.

چنانکه

$$(-4)\cdot 3 = (-4)+(-4)+(-4) = -12$$

و

$$(-4)^3 = (-4)\cdot(-4)\cdot(-4) = -64$$

۶۷- برای جمع و تفریق و ضرب و تقسیم چند توان قاعده کلی اینست که هر یک از آنها را حساب کرده از روی قاعده های پیش عمل میکنیم

چنانکه

$$(-2)^3 + (+3)^2 = (-8) + (+9) = +1$$

و

$$(-2)^3 - (+3)^2 = (-8) - (+9) = -17$$

و

$$(-2)^3 \times (+3)^2 = (-8) \times (+9) = -72$$

$$(-2)^3 : (+3)^2 = (-8) : (+9) = -\frac{8}{9}$$

پرسش های ساده

حاصل عملهای زیر را بدست آورید

$(-2)^3 - (-4)$ $\qquad$ $(-5)^2 + (-3)^3$

$(-1)^3 - (-1)^4$ $\qquad$ $-3^2 - 2^3$

$(-4)^2 (-2)^3$ $\qquad$ $(-4)^2 \times (-3)^2$

$(-5)(-1)^3(-3)$ $\qquad$ $(-1)^3 \cdot (-2)^2 \cdot (-3)$

$(-5)^3 : (-1)^2$ $\qquad$ $(-2)^4 : (-3)^2$

$(-5)^3 : (-2)^3$ $\qquad$ $(-3)^3 : (-2)^2$

$(-۵)^{۲} \cdot (-۵)$ $\qquad$ $(-۳)^{۳} \cdot (-۳)^{۴}$

$(-۸)^{۲} : (-۸)$ $\qquad$ $(-۴)^{۳} : (-۴)^{۲}$

$(-۲)^{۲} \cdot (-۲)^{۲}$ $\qquad$ $۴^{۳} \times (-۴)^{۳}$

۸۶- حالتهای مخصوص - نخست - حاصل ضرب چند توان که دارای یک پایه باشند توانیست دارای همان پایه که نمای آن مجموع نماهای آنچند توان باشد

$$a^{۲} \times a^{۳} = a \cdot a \times a \cdot a \cdot a = a^{۳+۲} = a^{۵}$$

چنانکه

$$(-۲)^{۳}(-۲)^{۲} = (-۲)^{۵} = -۳۲$$

$$(-۵)^{۲}(-۵)^{۴} = (-۵)^{۶} = ۱۵۶۲۵$$

دوم - حاصل ضرب چند توان که دارای یک نما باشند توانیست که پایه آن حاصل ضرب پایه ها و نمای آن یکی از نماها باشد

چنانکه

$$(-۳)^{۲}(-۴)^{۲} = (-۳)(-۳) \times (-۴)(-۴)$$

$$= [(-۳)(-۴)]\ [(-۳)(-۴)]$$

$$= [(-۳)(-۴)]^{۲} = ۱۲^{۲} = ۱۴۴$$

و بطور کلی

$$x^{a} y^{a} z^{a} = (xyz)^{a}$$

سوم - خارج قسمت دو توان که دارای یک پایه باشند توانیست دارای همان پایه و نمائی مساوی تفاضل نمای مقسوم علیه از نمای مقسوم

مثال ۱-

$$(-3)^4 : (-3)^2 = \frac{(-3)(-3)(-3)(-3)}{(-3)(-3)}$$

چون مقسوم و مقسوم علیه را دو بار بر ۳- تقسیم کنیم خارج قسمت مساوی $\frac{(-3)(-3)}{1}$ ویا $(-3)^2$ که مساوی $(-3)^{4-2}$ است میشود

وبطور کلی در تقسیم a^m بر a^n اگر $m > n$ باشد خواهیم داشت

$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad (1)$$

مثال ۲-

$$(-4)^3 : (-4)^2 = \frac{(-4)^3}{(-4)^2} = -4$$

از روی دستور (۱) این خارج قسمت مساوی $(-4)^1$ میشود پس $(-4)^1 = -4$

یا بطور کلی $a^1 = a$

یعنی: توان نخست هر عدد خود آن عدد است

مثال ۳-

$$(-3)^2 : (-3)^2 = 1$$

اگر دستور (۱) را در این مثال که نماها مساوی هستند بکار بریم خارج قسمت مساوی $(-3)^0$ میشود از طرف دیگر اینجا خارج قسمت مساوی ۱+ است بنابراین برای اینکه دستور (۱) را در حالت $m = n$ نیز عمومیت داده باشیم قرار داد می کنیم که:

توان صفر هر عدد ۱+ است یعنی $a^0 = +1$

مثال ۴ـ

$$(-5)^2 : (-5)^4 = \frac{(-5)^2}{(-5)^4}$$

اگر چون مقسوم و مقسوم علیه را دو بار بر ۵- تقسیم کنیم خارج قسمت مساوی $\frac{1}{(-5)^2}$ یا $\frac{1}{(-5)^{4-2}}$ که عکس $(-5)^{4-2}$ است میشود

چون موافق دستور (۱) عمل کنیم خارج قسمت بالا مساوی $(-5)^{2-4}$ و یا $(-5)^{-2}$ میشود

درینجا بنمای منفی میرسیم ـ برای اینکه دستور (۱) کلی باشد میتوان چنین نوشت

$$(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2}$$

پس قرار براین میگذاریم

توانی که دارای نمای منفی است مساوی عکس توانیست که پایهٔ آن همان پایه و نمای آن قدر مطلق آن نما باشد

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

نتیجه ـ با قرار دادهای بالا همیشه میتوان نوشت

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

اگر در آن m و n دو عدد درست بوده و ممکن است $m>n$ و یا $m<n$ و یا $m=n$ باشد

پرسش های ساده

۵ـ عمل های زیر را انجام دهید.

$(-3)^{2}(-3)^{-11}$	$5^{2}\ 5^{2}$	$3^{2} \cdot 3$
$(-1)^{-1}(-2)^{-11}$ ،	$3^{2} \cdot 2^{2}$	$(-2)^{0} \cdot (-2)^{1}$
$x^{6} \cdot x^{-6}$	$x^{0}y^{0}$	$5^{0} \cdot (-3)^{0}$
$3^{3} : 3^{3}$	$5^{a} \cdot 2^{a}$	$y^{-4} \cdot y^{4}$
$(-2)^{0} : (-5)^{0}$	$(-7)^{1} : (-7)^{2}$	$4^{-2} : 4^{-3}$
$x^{0} : x^{2}$	$x^{2} : x^{0}$	$a^{b} : a^{-b}$
$(-x)^{2} : x^{-2}$	$2^{a} : 2^{2a}$	$a^{1} : a^{0}$

۶۹- تبصره- میتوان $\frac{1}{b}$ را b^{-1} نوشت و بنابراین

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$$

و بدین ترتیب تقسیم دو عدد را بصورت ضرب مینویسیم

۷۰- هرگاه بخواهیم توان m ام a را بتوان p برسانیم کافیست a را بتوان حاصل ضرب mp برسانیم

یعنی

$$(a^{m})^{p} = a^{mp}$$

زیرا مثلاً

$$(x^{2})^{3} = xx\ xx\ xx = x^{6}$$

تبصره- بنابراین $(x^{2})^{3} = (x^{3})^{2}$ و $(x^{a})^{b} = (x^{b})^{a}$

$$\left(\frac{1}{a^{2}}\right)^{3} = (a^{-2})^{3} = a^{-6} = \frac{1}{a^{6}}$$

۷۱- توان m ام خارج قسمت دو عدد جبری مساوی خارج قسمت

۳۳۱۰

توان m ام آنده عدد است

یعنی $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

زیرا $\left(\frac{a}{b}\right)^m = (a \cdot b^{-1})^m = a^m \cdot b^{-m}$

$$= a^m \cdot \frac{1}{b^m} = \frac{a^m}{b^m}$$

چنانکه $\left(\frac{-4}{2}\right)^3 = \frac{(-4)^3}{2^3} = -8$

پرسش‌های ساده

۱- تقسیمهای زیر را بصورت ضرب بنویسید

$\frac{2}{3}$ $\frac{-7}{5}$ $\frac{2}{-4}$ $\frac{-a}{-x}$

$\frac{-b}{-x}$ $\frac{-2}{-5}$ $\frac{-b^2}{-x}$ $\frac{b^2}{a^2}$

۲- عملهای زیر را انجام دهید

$(5^3)^2$ $(-2^2)^3$ $(-1^a)^5$ $(-1^a)^6$

$(x^0)^m$ $\left[(-b)^5\right]^0$ $(3^{-2})^2$

$\left[(-2)(-3)\right]^2$ $\left[(-2)^2 \cdot (-3)\right]^{-1}$

$\left(\frac{-2}{-3}\right)^2$ $(ab^2)^3$ $\left(\frac{3}{-4}\right)^{-2}$

$\left(\frac{a}{-b}\right)^{-1}$ $\left(\frac{-5}{x}\right)^0$ $\left(\frac{-5^2}{-2^3}\right)^{-1}$

ج- ریشهٔ اعداد جبری

۷۲- ریشهٔ n ام عدد جبری a (n عددی است درست بزرگتر از صفر) عددیست

باشند b بقسمی که چون آنرا بتوان n رسانیم عدد a بدست آید و آنرا بدین شکل نویسند $b = \sqrt[n]{a}$

بنابتعریف $b^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$

نشانه $\sqrt{\ }$ را ریشگی و عدد n را شمارهٔ ریشه نامیم

ریشهٔ دوّم a یعنی $\sqrt[2]{a}$ را اغلب چنین نویسند $\sqrt{a}$ (یعنی بدون شمارهٔ ریشه)

۷۳- چون توان جفت هر عدد جبری عددیست مثبت (مرهٔ ۶۶) بنابراین:

اوّلاً هیچ عددی نمیتوان یافت که بتواند ریشهٔ جفت عدد منفی باشد

چنانکه عبارتهای $\sqrt{-1}$ (ریشهٔ دوّم ۱-) و $\sqrt[4]{-5}$ (ریشهٔ چهارم ۵-) بدون معنی میباشند

ثانیاً هر عدد مثبت دارای دو ریشه n ام است وقتی که n جفت باشد و این دو ریشه قرینهٔ یکدیگرند

چنانکه عدد ۸۱ دارای دو ریشهٔ دوّم است ۹+ و ۹- : $81 = (\pm 9)^2$

گوئیم ریشهٔ دوم ۸۱ مساویست با بعلاوه یا منهای ۹

وهمچنین عدد ۸۱ دارای دو ریشهٔ چهارم ۳+ و ۳- میباشد: $81 = (\pm 3)^4$

ثالثاً هر عدد جبری (خواه مثبت یا منفی) دارای یک ریشهٔ شمارهٔ فرد است

چنانکه ۸- یک ریشهٔ سوم دارد مساوی ۲- : $\sqrt[3]{-8} = -2$

وهمچنین ریشهٔ پنجم ۳۲ عدد ۲ است : $\sqrt[5]{32} = 2$

بکلیه حالتها $\sqrt[n]{0} = 0$ (n جفت یا تاق)

۷۴ — از اینجا و از آنچه در توان عددهای جبری گفتیم نتیجه میشود:

۱ - شرط لازم و کافی برای اینکه دو عدد جبری مساوی باشند اینستکه توان تاق یا ریشهٔ تاق آن دو عدد مساوی باشند

۲ - شرط لازم و کافی برای اینکه دو عدد جبری هم نشانه (هر دو مثبت یا هر دو منفی) مساوی باشند این است که توان جفت یا (اگر مثبت باشند) ریشه های جفت آن دو عدد مساوی باشند

این نتیجه ها را میتوان مثلاً برای نشان دادن تساوی دو عدد که ظاهراً مختلف میباشند بکار برد

مثلاً میخواهیم ثابت کنیم که دو عدد $\sqrt{۴۸}$ و $۴\sqrt{۳}$ مساویند چون هر دو مثبت میباشند کافی است ثابت کنیم توانهای دوم آنها یکی است توان دوم اولی ۴۸ و توان دوم دومی چنین است

$$(۴\sqrt{۳})^۲ = ۴^۲ \times (\sqrt{۳})^۲ = ۱۶ \times ۳ = ۴۸$$

۷۵ — ضرب ریشه ها - حاصل ضرب ریشه های چند عدد که دارای یک شماره باشند مساوی است با ریشهٔ حاصل ضرب همان چند عدد با همان شماره

یعنی مثلاً $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}$

زیرا چون دو طرف را بتوان m رسانیم میشود

$$a \cdot b \cdot c = abc$$

پس $\sqrt{۲} \cdot \sqrt{۵} = \sqrt{۱۰}$

$\sqrt[3]{-3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{-27} = -3$

۷۶- خارج قسمت دو ریشه - خارج قسمت ریشهٔ mام دو عدد مساویست با ریشهٔ mام خارج قسمت آن دو عدد

یعنی مثلاً $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$

زیرا چون دو طرف را بتوان m رسانیم درستی این تساوی معلوم میشود

پس $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$

و $\sqrt[5]{-9} : \sqrt[5]{81} = \sqrt[5]{\frac{-9}{81}} = \sqrt[5]{\frac{-1}{9}}$

پرسش های ساده

حاصل ضرب و خارج قسمتهای زیر را بدست آورید :

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[3]{-4}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{a}$

$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-16}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{-2}$ $\qquad$ $\sqrt[7]{-a^5} \cdot \sqrt[7]{-a^2}$

$\sqrt{20} : \sqrt{5}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{-81}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{-32} : \sqrt[3]{-4}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{64} \cdot \sqrt[5]{-2}$ $\qquad$ $\sqrt[7]{x^{16}} : \sqrt[7]{x^2}$

۷۷- عکس قاعده های بالا نیز درست است یعنی :

اولاً ریشهٔ mام حاصل ضرب چند عدد مساوی حاصل ضرب ریشهٔ mام هریک از آنها است

یعنی $\sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c}$

بنابراین $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[4]{a^6} = \sqrt[4]{a^4 \cdot a^2} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a^2} = |a|\sqrt[4]{a^2}$

ثانیاً ریشه m ام خارج قسمت دو عدد مساوی خارج قسمت ریشه m ام آنها است

یعنی $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

بنابراین $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt[3]{-\frac{8}{3}} = -\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$

پرسش های ساده

ریشه های زیر را ساده کنید:

$\sqrt{8}$ $\sqrt{27}$ $\sqrt{125}$ $\sqrt{45}$

$\sqrt[3]{81}$ $\sqrt[3]{-16}$ $\sqrt[3]{54}$ $\sqrt[5]{-64}$

$\sqrt{\frac{6}{8}}$ $\sqrt{\frac{12}{27}}$ $\sqrt{\frac{3}{27}}$ $\sqrt{\frac{9}{16}}$

$\sqrt[3]{-\frac{16}{96}}$ $\sqrt[3]{-\frac{54}{10}}$ $\sqrt[4]{\frac{64}{81}}$ $\sqrt[5]{\frac{-6}{64}}$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را حساب کنید

$(4 - \frac{3}{4}) : (\frac{1}{3} - 2)$

$(-4)(+\frac{3}{5}) : (-2)(3 - \frac{5}{8})$

$$\left(7 + \frac{4}{5} + \frac{-1}{15}\right)(-3) + \frac{-4}{11} + \left(9 - \frac{-6}{5}\right) : \frac{15}{120}$$

$$4\left(3 - \frac{5}{7} + \frac{11}{28}\right)\left(\frac{-49}{74}\right) - \left(10 - 4 - \frac{6}{5} + 2\right) : \frac{45}{8}$$

۲- مطلوبست محاسبهٔ عبارت

$$\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \left(1 + \frac{a+b}{a-b}\right)$$

در حالت های زیر

$a=1 ; b=7$ و $a=4 ; b=3$ و $a=-6 ; b=5$ و $a=-10 ; b=-15$

۳- حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید

$$3^3 - (-2)^2 \quad ; \quad 3^3 + (-2)^3 \; ; \; (-1)^2 + (-1)^3 - (-2)^1$$

$$(-3)^2 + 2 \cdot 3 \cdot (-4) : (-4)^2$$

$$\left[(-5)(+2)(-3) : (-7)\right]^3$$

$$(-5)^3 + 3(-5)^2(+4) + 3(-5)(-4)^2 - 4^3$$

۴- عبارتهای زیر را حساب کنید وقتیکه $x=-3$ و $y=4$ باشد

$$x^2 \quad ; \quad x^3 \quad ; \quad y^2 \quad ; \quad 5x^2y$$

$$x^2 \pm y^2 \; , \; x^3 \pm y^3 \; ; \; x^4 - y^4 \; ; \; x^2 \pm 2xy + y^2$$

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \; , \; (x+y)^2(x-y)^2 ; (x^2-y^2)^2$$

۵- عبارت $\frac{(2a+b)(a-2b)^2}{2a^2b}$ را در حالت های زیر حساب کنید!

$a=1 ; b=-1$ و $a=-3 ; b=6$ و $a=-4 ; b=-2$

۶- در تساویهای $2x^3 - 20x + 50 = 0$ و $x^2 + 12 = 7x$

$x^2 + x = 12$

بجای x اعداد ± 5 و ± 3 و ± 4 و -8 و $\frac{1}{4}$ را

گذاشته نشان دهید درازاء کدام اعداد تساوی برقرار خواهد بود

۷- مطلوبست محاسبهٔ عبارتهای زیر:

$\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{-3} : (-3)$ $\qquad$ $\sqrt{(-4)\times 5\times(-3)+21}$

$\sqrt[3]{6(-4)+(-6)9-4}$

$(-3)\sqrt[3]{(-4)(-3)-2} \cdot \sqrt[3]{100} : \sqrt[3]{-27}$

۸- عبارتهای زیر را بازاء $a=16$; $b=27$; $c=24$ حساب کنید

$\sqrt{\frac{3b}{a}} - \sqrt[3]{\frac{b}{9c}} + \sqrt[4]{\frac{b}{27a}}$

$\sqrt[3]{4a} - \sqrt{\frac{25}{12b}} + \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$

$\sqrt[3]{\frac{3a}{2c}} - \sqrt[4]{\frac{9b}{2c}} + \sqrt{\frac{a}{3c}}$

$\frac{3}{8}a - \sqrt{\frac{4a}{3b}} - \sqrt[3]{\frac{4ab}{b^2}}$

۹- عبارتهای زیر را حساب کنید وقتی که $a=-4$; $b=-3$

و $c=2$; $x=-1$; $y=-3$; $z=1$ باشد

$\sqrt[3]{b^3c^6} + \sqrt{a^2+b^2}$

$\sqrt[3]{a^3+b^3+17cx}$

$$\sqrt{2x^3 - 2bc - b^2} \; ; \; \sqrt{a^4 + 4b}$$

$$\sqrt{(x^2 + y^3 + z)(x - y - 3z)} \; ; \; \sqrt{-2x - 2y + z}$$

۱۰- میدانیم راهی که جسمی در موقع افتادن می‌پیماید از دستور $e = \frac{1}{2} g t^2$ بدست میآید که در آن، e درازای راه و g تقریباً مساوی ۹٫۸۱ متر و t ثانیه هاییست که جسم در حرکت است. حال اگر بلندی برجی سی و پنج متر باشد معلوم کنید چند ثانیه طول میکشد تا سنگی که از بالای آن رها شده بپای برج برسد؟

۱۱- زمینی است بشکل مستطیل که درازای آن ۲۵٫۳۲ متر و پهنایش ۱۲٫۷۵ متر است میخواهیم آنرا با زمینی بشکل مربع که مساحتش مساوی مساحت آن مستطیل باشد عوض کنیم ضلع این مربع را حساب کنید.

۱۲- زمینی است بشکل مثلث متساوی الاضلاع که درازای هر ضلعش ۲۵٫۷۵ متر است ارتفاع این مثلث را تا $\frac{1}{100}$ متر تقریب حساب کنید.

۱۳- چون S و V بترتیب سطح و حجم یک کره این رابطه برقرار است $S^3 = 36\pi V^2$ اگر سطح این کره مساوی ۷۲ متر مربع باشد حجم آن چقدر است؟

۱۴- محیط مثلث متساوی الساقینی ۱۶ متر است و یکی از ساقهای آن ۱۰ متر میباشد ارتفاع و مساحت آنرا حساب کنید.

فصل سوم - عبارتهای جبری و چندجمله‌ایها

الف - عبارتهای جبری

۷۷- عبارت جبری تشکیل شده است از یک رشته حروف و اعداد که بوسیله نشانه‌های جبری بهم پیوسته باشند

مانند $\frac{act}{100}$ و $2(a+b)-x$ و $\sqrt{5a-2b^2}-\frac{3}{4}$

۷۸- **یک جمله** - هر عبارتیکه بین حروف و اعداد آن عمل جمع و تفریق نباشد یکجمله یا جمله نامند

مانند -5 و $\frac{1}{2}a$ و x و $-n^2$ و $-2xy$ و $\frac{a^2\sqrt{3}}{x\sqrt{2}}$

۷۹- **ضریب** - چون عملهای بین اعداد یک جمله مفروضی را اجرا نمائیم حاصل آنرا ضریب عددی یک جمله مفروض گویند

مثلاً در یک جمله $-\frac{3}{2}x^2 \cdot 5 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ حاصل $\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot -\frac{3}{2}$ یعنی $-\frac{15\sqrt{3}}{8}$ ضریب عددی یک جمله مفروض است.

و همچنین در یک جمله‌های بالا ضریبهای عددی بترتیب عبارتند از -5 و $\frac{1}{2}$ و 1 و -1 و -2 و $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

و بطور کلی ضریب یکجمله نسبت بیکی از حرفهای آن عبارت از حاصل عاملی است که بین سایر

حرفها و عددهای یک جمله انجام میشود

پرسش های ساده

ضریب های عددی و همچنین ضریب های یک جمله های زیر را برحسب حرف x بیان کنید:

$-3x \qquad \frac{1}{2}a^2b \qquad \frac{\sqrt{3}}{5}xy^2 \qquad -x^2y$

$xy^2 \qquad \frac{-3}{\sqrt{2}}a \qquad \frac{-2abx}{3\sqrt{y}} \qquad -\frac{5\sqrt{2}\,yx}{2a}$

۸۰- جمله های متشابه - جمله های متشابه جمله هائی را گویند که تنها در ضریب اختلاف داشته باشند

مانند ۲ و ۳- و ۵ و همچنین ۲√۷ و ۳√۷ - و همچنین

$-\frac{\sqrt{2}}{3}a^2x$ و $6a^2x$ و $-5a^2x$

۸۱- جمع جمله های متشابه - روشن است که:

$2a + 5a = 7a$

$xy + 3xy + 8xy = 12xy$

$3b^2 + (-4b^2) = -b^2$

$3abc + (-abc) + 4abc = 6abc$

بعلاوه میتوانیم درستی این تساویها را اینطور تحقیق کنیم که بجای حرفها عددهای دلخواه بگذاریم و ببینیم که اندازهٔ عددی دو طرف تساویها یکی است

بنابراین برای جمع جمله های متشابه این قاعده را داریم:

۸۴- قاعده- حاصل جمع چند جملهٔ متشابه جمله ایست متشابه با آنها که ضریبش حاصل جمع جبری ضریبها باشد

مانند

$$۶a^۴ + ۴a^۴ = (۶+۴)a^۴ = ۱۰a^۴$$

$$۳ax + ۲ax + ۸ax = (۳+۲+۸)ax$$

$$= ۱۳ax$$

$$x^۲y + (-x^۲y) = (۱-۱)x^۲y = ۰$$

تبصره- در بعضی جاها که اشتباهی رخ ندهد میتوان عبارتهائی مانند $(x+y)$ و $\sqrt{۷-۳x}$ را یک جمله در نظر گرفت

بنابراین:

$$۶(x+y) + [-۵(x+y)] + (x+y) = ۲(x+y)$$

$$\sqrt{۷-۳x} + (-۷\sqrt{۷-۳x}) + ۳\sqrt{۷-۳x} = -۳\sqrt{۷-۳x}$$

پرسش های ساده

حاصل عبارتهای زیر را پیدا کنید:

$-۲۱a + ۷a$ ، $۵a + ۳a$

$-xy + ۳xy - ۲xy$ ، $-۹x^۲ - ۳x^۲$

$۲\sqrt{y} - ۳\sqrt{y} + \sqrt{y}$ ، $-\frac{۲}{x} + \frac{۷}{x}$

$۲(۵-x) + ۳(۵-x)$

$$۲(a+\sqrt{b}) - ۴(a+\sqrt{b}) + ۲(a+\sqrt{b})$$

۸۳ - **جمع جمله های غیر متشابه** - برای جمع جمله های غیر متشابه آنها را با نشانه های خود بدنبال هم مینویسند

مثلاً حاصل جمع دو جمله $-۲a$ و $۳b$ را چنین نویسند $-۲a+۳b$

۸۴ - **تفریق یک جمله ها** - چون یکجمله در حکم یک جمله عددیست (بازاء مقدارهای عددی حرفها) برای تفریق موافق (نمره ۲۸) باید نشانه یکجمله کاسته را تغییر داده با یک جمله کاهش یاب جمع جبری نمائیم

مثلاً برای تفریق $-۳xy$ از $۷xy$ راه عمل چنین است:

$$۷xy - (-۳xy) = ۷xy + (+۳xy) = ۱۰xy$$

همچنین

$$-۵\sqrt{x^۲+y^۲} - (-۲\sqrt{x^۲+y^۲}) =$$

$$-۵\sqrt{x^۲+y^۲} + (+۲\sqrt{x^۲+y^۲}) = -۳\sqrt{x^۲+y^۲}$$

پرسش های ساده

تفریق های زیر را عمل کنید:

$۵x^۲$ از $x^۲$ ، $۴a^۲$ از $a^۲$

$-۵xy$ « $-۲xy$ ، $-\frac{۳}{۴}x^۲y$ « $\frac{۱}{۴}x^۲y$

$-۳\sqrt{۵x}$ « $۳\sqrt{۵x}$ ، $-\sqrt[۳]{xy^۲}$ « $-\sqrt[۳]{xy^۲}$

$\frac{۱}{۵}a\sqrt{x}$ « $-\frac{۱}{۴}a\sqrt{x}$ ، $\frac{-۳x^۲}{\sqrt{۵}}$ « $\frac{۲x^۲}{\sqrt{۵}}$

۸۵- چند جمله - از جمع جبری یک جمله با چند جمله تشکیل میشود

مانند $ax + b$ ؛ $ax^2 + bx + c$ ؛ $2xy - 2y + b\sqrt{2} - 1$

۸۶- ساده کردن چند جمله ها - چون چند جمله مجموع چند یک جمله ایست یعنی در حقیقت مجموع چند عدد جبری است پس میتوان جای آن یک جمله ها را بدلخواه تغییر داد و (نمره ۲۲۶) بخصوص میتوان یک جمله های متشابه را پهلوی هم نوشت و بجای جمله های متشابه مجموعشان را قرار داد این عمل را ساده کردن چند جمله نامیم

مثال - چند جمله

$$8a^2b - 4bc^2 + 1 + 3a^2b - 2c + bc^2 - 2$$

را میتوان (با قرار دادن جمله های متشابه در داخل پرانتز) چنین نوشت

$$(8a^2b + 3a^2b) + (-4bc^2 + bc^2) - 2c + (1 - 2)$$

پس از ساده کردن چنین میشود

$$11a^2b - 3bc^2 - 2c - 1$$

ساده کردن چند جمله ها بر حسب یکی از حرفهای آنها :

مثال ۱- چند جمله $ax + bx + 1$ بر حسب حرف x دارای دو جمله متشابه ax و bx میباشد که مجموعشان $(a+b)x$ است

بنابراین چند جمله بالا پس از ساده کردن چنین میشود

$$(a+b)x + 1$$

مثال ۲ـ در چند جمله‌ای

$$2x^4+3x^2-ax^4-2ax^2+x^3-3bx+x$$

جمله‌های متشابه برحسب حرف x عبارتند از ($2x^4$ و $-ax^4$) و ($3x^2$ و $-2ax^2$)

و ($-3bx$ و x) بنابراین عبارت جبری بالا پس از ساده شدن بدینصورت در می‌آید

$$(2-a)x^4+(3-2a)x^2+x^3+(-3b+1)x$$

پرسش‌های ساده

چند جمله‌ای‌های زیر را برحسب حرف x ساده کنید:

$3x-x^2+2x-1$ $\qquad$ $x^3-2x^2+ax^3-x^2$

$x^2y-xy^2+x^2-x$ $\qquad$ $2-ax+3x-4$

$x\sqrt{2}-x\sqrt{3}+1$ $\qquad$ $x^2\sqrt{2}-x^2+10x$

$2x^2-\frac{1}{5}x^2+7x-a+bx$

۸۷ـ مرتب کردن چند جمله بحسب توانهای صعودی یا نزولی یک حرف

در نوشتن عبارت چند جمله‌ای اغلب یک حرف آنرا در نظر گرفته چند جمله را نسبت بتوانهای آن حرف مرتب می‌کنند یعنی طوری می‌نویسند که درجهٔ آن حرف در جمله‌های آن چند جمله یا مرتباً تنزل کند و یا ترقی نماید در حالت اول گوئیم چند جمله بحسب توانهای نزولی آن حرف مرتب شده و در حالت دوم گفته میشود که بحسب توانهای صعودی آن حرف مرتب شده است.

مثال ۱ـ چند جمله‌ای

$$2x^{2}y^{3} - 5y^{2}x^{4} + ax - 2b + y^{5}x^{1}$$

واگر بحسب توانهای نزولی x مرتب کنیم چنین نوشته میشود

$$-5y^{2}x^{4} + 2x^{2}y + y^{5}x^{1} + ax - 2b$$

واگر بحسب توانهای صعودی x مرتب شود چنین نوشته میشود

$$-2b + ax + y^{5}x^{1} + 2x^{2}y - 5y^{2}x^{4}$$

نمای x در جملهٔ b ۲- صفر است زیرا میتوان نوشت

$$-2b = -2bx^{0}$$

مثال ۲ - چند جملهٔ بالا را اگر بترتیب توانهای نزولی وصعودی y مرتب کنیم بترتیب خواهیم داشت

$$x^{2}y^{5} - 5x^{4}y^{2} + 2x^{3}y + ax - 2b$$

$$ax - 2b + 2x^{3}y - 5x^{4}y^{2} + x^{2}y^{5}$$

نمای y در b۲- و ax صفر است یا بعبارت دیگر ضریب y^{0} در چند جملهٔ مفروض $ax - 2b$ است

۸۸ - درجهٔ چند جملهٔ نسبت بیک حرف آن و چند جملهٔ کامل و ناقص -

این درجه عبارتست از بزرگترین درجه ای که آن حرف در جمله های آن چند جملهٔ دارد چنانکه چند جملهٔ بالا نسبت به x از درجهٔ چهارم است و نسبت به y از درجهٔ پنجم و چون این چند جملهٔ نسبت به x شامل تمام درجه های کمتر از ۴ است گوئیم که چند جملهٔ درجهٔ چهارم کامل است نسبت به x

ولی چون تمام درجه های پائین تر از ۵ را از y ندارد (مثلاً جمله ایکه در آن y^4 و y^2 باشد ندارد) گوئیم چند جمله بالا درجه پنجم ناقص است نسبت به y

مثال - چند جمله کامل درجه اول نسبت به x شامل دو جمله است یکجمله دارای x از درجه اول و یک جمله بدون x (یا دارای x از درجه صفر) پس بصورت کلی $ax + b$ خواهد بود.

همچنین چند جمله کامل درجه دوم نسبت به x دارای سه جمله است و بصورت کلی

$Ax^2 + Bx + C$ است

و بطور کلی چند جمله کامل از درجه n ام دارای $n+1$ جمله است.

پرسش های ساده

چند جمله های زیر را مرتب نموده و درجه آنها را برحسب هریک از حرفهای آنها معلوم نموده و معین کنید که کدام یک کامل و کدام یک ناقصند

$2x - y$ $\qquad$ $2x - 3x^2 + y - 1$

$ax^2 - 1$ $\qquad$ $ax^2 - 2bx$

$x^3 + 1 - xy + 2y^2$ $\qquad$ $1 - 3x^3 - 2ax$

$x^3y - y + 1$ $\qquad$ $xy^3 - y^2x + 1$

$\sqrt{3}x - x\sqrt{5} - y\sqrt{3}$ $\qquad$ $2y^2 - y + 2xy^3 - 1$

۸۹ - **جمع چند جمله ها با یکدیگر** - برای جمع چند جمله ها با یکدیگر جمله های آنها را با نشانه های خودشان بدنبال هم مینویسیم و چند جمله حاصل را مطابق قاعده بالا ساده میکنیم

برای این کار بجای آنکه چند جمله‌ها را دنبال هم بنویسیم بهتر این است که :

ابتدا هریک را ساده کرده بعد طوری بنویسیم که جمله‌های متشابه آنها دسته بدسته در یک ستون قرار گیرند.

مثال - برای جمع $2a - 3b - ac^2$ و $2b + 3ac^2$ و $-3a - 7ac^2 + 11$ صورت عمل چنین است :

$$\begin{array}{llll} 2a & -3b & -ac^2 & \\ & 2b & +3ac^2 & \\ -3a & & -7ac^2 & +11 \\ \hline -a & -b & -5ac^2 & +11 \end{array}$$

حاصل جمع .... $-a - b - 5ac^2 + 11$

چون هریک از این چند جمله‌ها در حقیقت یک چند جملهٔ عددیست پس باید مجموع جبری مقدار عددی آنها (بازاء تمام مقدارهای عددی a و b و c) مساوی مقدار عددی حاصل جمع باشد (بازاء همان مقدارهای a و b و c)

چنانکه برای تحقیق اگر $a = -2$ و $b = 5$ و $c = -1$ باشد خواهیم داشت

$$2a - 3b - ac^2 = -4 - 15 + 2 = -17$$

$$2b + 3ac^2 = 10 - 6 = 4$$

$$-3a - 7ac^2 + 11 = +6 + 14 + 11 = 31$$

$$-a - b - 5ac^2 + 11 = +2 - 5 + 10 + 11 = 18$$

مثال دیگر - حاصل جمع چند جمله های $ax+4x+3x^2$ و cx^2-2ax^2+bx-1 و $4bx-x+a$ را بحسب حرف x بدست آورید

میتوان آنهـا را با نشانه هایشان دنبال هم نوشته چند جمله حاصل را بحسب x ساده نمود

و نیز ممکن است ابتدا هریک از چند جمله های بالا را ساده کنیم ازینقرار:

$(a+4)x+3x^2$ و $(c-2a)x^2+bx-1$

و $(4b-1)x+a$

و برای اینکه چیزی از قلم نیفتد بهتر آنستکه هریک از چند جمله ها را مثلاً بترتیب توانهای صعودی x مرتب کرد و بعد موافق قاعده بالا عمل نمائیم درین صورت خواهیم داشت:

$$
\begin{array}{rrr}
 & (a+4)x+ & 3x^2 \\
-1+ & bx+ & (c-2a)x^2 \\
a+ & (4b-1)x & \\
\hline
\end{array}
$$

$$-1+a+(a+5b+3)x+(c-2a+3)x^2$$

۹۰- تفریق چند جمله - چون هر چند جمله در حقیقت چند جمله عددی است برای تفریق موافق (نمره ۳۶) باید نشانه جمله های کاسته را تغییر داده با جمله های کاهش یا جمع جبری نمود.

مثال ۱- میخواهیم $5ac$ را از $bx+3ac-1$ تفریق کنیم طرز عمل بدین قرار

خواهد بود.

$$bx + 3a^2c - 1 - (5a^2c) = bx + 3a^2c - 1 + (-5a^2c)$$

$$= bx - 2a^2c - 1$$

مثال ۲- میخواهیم $4x^2 - 2xy - 11$ را از $3x^2 - 2xy + 5y^2 - 7$ تفریق کنیم جمله های کاسته را تغییر نشانه داده با کاهش یاب جمع میکنیم از نیقرار:

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2xy + 5y^2 - 7 \\ -4x^2 + 2xy \qquad + 11 \\ \hline -x^2 \qquad + 5y^2 + 4 \end{array}$$

همان طوریکه در جمع گفته شد میتوان بجای حرفها عدد قرار داده درستی عمل را تحقیق نمود چنانکه اگر $x = 2$ و $y = -5$ باشد کاهش یاب ۱۵۰ و کاسته ۲۵ و بنابراین تفاضل ۱۲۵ خواهد بود و اندازهٔ عددی $-x^2 + 5y^2 + 4$ نیز ۱۲۵ است

تمرین ها

۱- عبارتهای زیر را بحسب حرف x ساده نموده و مرتب کنید:

$ax + 4x - a \qquad ax^2 - 2mx + x - 1$

$x^3 - 2ax^2 - bx + 2 - x^2 + x$

$x^2 - ax + bx^3 - bx + 2x^2 - 5$

$2ax^2 - 2bx + 5xy^2 - 7ax$

$$x^3 - mx^2 + 2mx - x + m - 1$$

$$K^2x^2 - (x - K)(K - x) + m(K^2 - K^3)$$

۲- عبارتهای زیر را ساده نموده ضمناً بازاء $x = -1$ و $y = -2$ و $z = 1$ در تحقیق حل را تحقیق کنید:

$$(x^2 + xy - y^2) - (z^2 - yz - y^2) + (xy + z^2 - x^2)$$

$$(x^2 + y^2 - 2xy) + (2z^2 - 4y^2 - 3yz) - (2x^2 - 4z^2 + 3xy)$$

$$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - z^2\right) - \left(x^2 - \frac{y^2}{3} - z^2\right) - \left(\frac{x^2}{2} - y^2 - \frac{z^2}{3}\right)$$

۳- حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$(7a - 2bc + c) - (5a - b + c)$$

$$(4x - 2y + 5) - (2x + 3y - 7)$$

$$(3\sqrt{4} - 5\sqrt{2} + 7) - (2\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 10)$$

$$-3x^3 - (5y - 7x^2 + 11) - (3x^3 - 4y + 2) + 5x^2$$

$$-(7a^3 + 4b^3) - (a^3 - 12b^3 + 16c^3) + 6a^3 - (6c^3 - 9b^3)$$

$$3ac - (ab + d) - [2ab - 3d - (-d - 4ac + 3ab)] - 2ac$$

$$m^2 - (x - y - m^2) - 3p - [4m^2 - (8p - x - y)]$$

۴- بفرض $A = -5x + 3y + 2z$ ، $B = -5y + 4x + 2z$

و $C = -4z + 3x + 2z$

مطلوبست محاسبهٔ عبارتهای $-A+B+C$ و $A-B+C$ و $-A+B-C$ و $A+B-C$

۵ - بفرض

$$A = x^{5} + x^{3} - 8x^{2} - 8$$

$$B = x^{4} - 5x^{3} + 6x^{2} + 4x - 8$$

$$C = x^{5} - 2x^{4} + x - 2$$

$$D = x^{3} - 4x^{2} + 4x - 1$$

مطلوبست محاسبهٔ $\pm A \pm B \pm C \pm D$ با ترکیب نشانه‌های مختلف و در هر یک از این حالتها بازاء $x = -2$ درستی عمل را امتحان کنید

۶ - معلوم کنید در x سال قبل سن شخصی چقدر بوده است در صورتیکه بدانیم a سال بعد سنش ۵۲ سال میشود

۷ - ایرج a ریال و کیومرث b ریال و جمشید c ریال پول داشتند قرار گذاشتند که اول ایرج از پول خود به دو نفر رفیق خود آنقدر بدهد تا پول آنها دو برابر شود و بعد کیومرث از آنچه که دارد پولهای دو رفیق خود را دو برابر کند و پس از او جمشید چنین کار را انجام دهد معلوم کنید پس از این کار مبلغ پول هر یک چقدر میشود

۸ - چهار نفر مبلغ A ریال را بین قسمت بین خود تقسیم نمودند اولی a ریال و نیمهٔ باقیمانده را برمیدارد دومی b ریال و $\frac{1}{3}$ باقیمانده را و سومی c ریال و $\frac{1}{4}$ باقیمانده را و آنچه که میماند از آن چهارمی خواهد بود سهم هر کدام چقدر است؟

ب ـ همچندی

۹۱ ـ تعریف همچندی (معادله) عبارتست از تساوی چون دو عبارت جبری مانند:

$$2 - 3 = 4 - 5$$

$$x - 2y = 2x + y - x - 3y$$

$$x - 3 = 2x$$

$$x^2 - x = 3$$

$$2x - y = 0$$

عبارت طرف چپ نشانهٔ تساوی را **طرف اول** همچندی و عبارت طرف راست آنرا **طرف دوم** همچندی نامیم.

مثلاً در همچندی دوم طرف اول $x - 2y$ است و در همچندی آخری طرف دوم صفر است

در همچندیهای بالا همچندی اول یک **تساوی عددی** است

در همچندی دوم اگر طرف دوم را ساده کنیم حاصل $x - 2y$ یعنی عین طرف اول میشود

بنابراین هر مقدار بجای x و y قرار دهیم تساوی درست است.

هر همچندی (مانند همچندی دوم) را که دو طرف آن پس از ساده کردن عین یکدیگر شوند **اتحاد** گوئیم.

بنابراین در اتحاد هر مقدار بجای حرفها در دو طرف قرار دهیم تساوی درست است

معمولاً در اتحادها بجای نشانهٔ $=$ نشانهٔ $\equiv$ را گذارند

در همچندی سوم دو طرف دو عبارت مختلف میباشند و مساوی نیستند مگر آنکه بجای x یک یا چند مقدار معینی (درین مثال عدد ۳-) گذاشته شود و همچنین است دو همچندی چهارم و پنجم - درین همچندیها دیده میشود که تساوی دو طرف همیشه برقرار نبوده و فقط وقتی برقرار است که بجای بعضی از حرفها مقدارهائی معینی گذارده شود

مثلاً در همچندی $x - ۳ = ۷$ دو طرف آن وقتی مساوی اند که بجای x عدد ۱۰ را قرار دهیم

و همچنین در همچندی $x^۲ - x = ۲$ تساوی وقتی درست است که بجای x یا ۲ و یا ۱- گذارده شود.

مقدار یا مقدارهائی را که بجای بعضی از حرفها باید گذارد تا دو طرف همچندی باهم مساوی شوند پاسخ (پاریشه) یا پاسخهای (پاریشه‌های) همچندی گویند

عدد ۱۰ در همچندی $x - ۳ = ۷$ و دو عدد ۲ و ۱- در همچندی $x^۲ - x = ۲$ پاسخ یا ریشه‌های این همچندی هستند

حرفی را که باید پاسخ همچندی را بجای آن گذارد تا دو طرف باهم مساوی شوند **مجهول** همچندی و سایر مقدارهای دو طرف را **معلوم** های همچندی نامیم

مثلاً در همچندی $x - ۳ = ۲$ حرف x مجهول است

و همچنین در همچندی $x - ۲a = a$ اگر a معلوم باشد x مجهول همچندی است و پاسخ یا ریشه این همچندی $۳a$ میباشد

پرسش های ساده

۱ـ ثابت کنید که همچندیهای زیر اتحاد هستند

$$x - a = -(a - x)$$

$$a + ۶ = ۷ + a - ۱$$

$$۳x - ۱ + x + ۱ - ۴x = ۰$$

$$a + b - x = ۲a - ۲x + ۳b - (a - x + ۲b)$$

$$a^۲ - (x + ۲y - ۱) = ۲a^۲ - ۲x - (a^۲ - x + ۲y) + ۱$$

۲ـ ببینید آیا هرکدام از عددهای داخل پرانتز ریشهٔ همچندی ردیف خود هست یا نیست؟

$x - ۳ = ۲$ (۵) — $۲y + ۵ = ۱۱$ (۳)

$۴ - y = ۲$ (۳) — $۶y - ۱۰ = ۲$ (۱)

$۳ + t = ۶$ (۲) — $۴ - ۵a = -۱۰$ (−۶)

$۴ - x^۲ = ۷$ (−۱) — $۲m^۲ - ۲ = ۰$ (±۱)

$۴ - a^۲ = ۵$ (۲) — $x^۲ - ۲x = ۸$ (−۲)

۹۲ـ **همچندیهای هم ارز** ـ دو همچندی را هم ارز گویند هرگاه ریشه یا ریشه‌های آنها مساوی باشد

مانند $۲x + ۳ = ۱۵$ و $x - ۱ = ۵$ که ریشهٔ هردو ۶ است

و دو همچندی $x^۲ = ۳x - ۲$ و $۲x^۲ + ۴ = ۶x$ که ریشه‌های آنها ۲ و ۱ است

۹۳- حل همچندی - حل کردن همچندی یعنی یافتن ریشه یا ریشه های آن .

برای حل کردن همچندی باید آن را بیک عده همچندیهای هم ارز که بتدریج هریک از دیگری ساده‌تر باشند تبدیل نمود بطوریکه آخرین همچندی جواب را روشن سازد .

برای این مقصود اصل های زیر را که بمناسبت ساده بودن احتیاجی بدلیل ندارد باید درنظر داشت :

۹۴- اصل ۱- هرگاه با دو طرف همچندی یک مقدار جمع کنیم ؛ یا از دو طرف آن یک مقدار کم کنیم ریشهٔ همچندی تغییر نمیکند یعنی همچندی حاصل هم ارز است با همچندی مفروض

مثال - ریشهٔ همچندی $x+2=5$ را پیدا کنید

بنا باصل بالا از دو طرف ۲ یکه کم میکنیم نتیجه میشود

$$x+2-2=5-2$$

و یا $x=5-2$ یعنی $x=3$

۹۵- نتیجه - اولاً دو عبارت مساوی و هم نشانه را میتوان از دو طرف همچندی حذف نمود .

زیرا بنا باصل ۱ میتوان این عبارت مساوی را از دو طرف کم کرد چنانکه دو طرف همچندی $x^2-2x-a=5x+x^2-1-a$ دارای دو جملهٔ $-a$ و x^2 است میتوان این دو جمله را حذف کرد همچندی بصورت سادهٔ $-2x=5x-1$ درمیاید

ان عبارتی را از یکطرف همچندی بطرف دیگر برد بشرط اینکه نشانه آن را

یا مثل این است که آن عبارت را از دو طرف کم کرده باشیم

ندی $x - a = 2a$ چون $a -$ را بطرف دیگر ببریم این همچندی بد

$x = 2a + $ و یا $x = 3a$

چندی $2x - 1 + x^2 = 2x^2 - 4$ با همچندی

$- x^2 - 2x = 2x^2$ و یا $2x = x^2 - 3$ هم ارز است در ینا

$x^2 + 1 -$ را بطرف دوم بردیم

پرسش های ساده

ی زیر را حل کنید .

$y + 3 =$ $\qquad$ $3 + a = 6$ $\qquad$ $x - 1 = 20$

$z + 11 =$ $\qquad$ $x - 2 = -2$ $\qquad$ $-6 + t = 7$

$t - 5 =$ $\qquad$ $2 + k = 0$ $\qquad$ $x + 2 = 2$

$- 5 = 0$ $\qquad$ $12 = d - 8$ $\qquad$ $-2 + y = -3$

اصل ۲ - چون دو طرف همچندی را در عددی جبری ضرب

که حاصل میشود با همچندی مفروض هم ارز است

ریشه همچندی $\frac{x}{3} = 2$ را تعیین کنید

ل ۲ دو طرف را در ۳ ضرب میکنیم نتیجه میشود

$$x = 6$$

پرسش های شفاهی

ریشه هر همچندی را بدست آورید:

$\frac{b}{4} = 10$	$\frac{a}{5} = 8$	$\frac{x}{3} = 1$
$\frac{x}{5} = -\frac{1}{5}$	$\frac{x}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{k}{2} = -6$
$\frac{t}{4} = -3$	$-\frac{1}{4} = \frac{y}{8}$	$-1 = \frac{z}{7}$
$-\frac{5}{3} = -\frac{z}{9}$	$-\frac{y}{4} = -\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{5} = \frac{m}{10}$

۹۷- اصل ۳- هرگاه دو طرف همچندی را در یک عدد جبری (بجز صفر) تقسیم کنیم ریشه همچندی تغییر نمی کند

مثال - همچندی $5x = 10$ را حل کنید

بنا باصل ۳ میتوان دو طرف را بر ۵ تقسیم نمود نتیجه میشود

$$x = 2$$

پرسش های شفاهی

همچندی های زیر را حل کنید

$56 = -14c$	$-3k = 15$	$6x = 12$
$18 = 5y$	$-3 = 2m$	$8a = 24$
$-125 = -25x$	$12y = 11$	$7b = -28$

$۵z = -۳$ $\qquad -۲R = ۲۴$ $\qquad -۱۳y = -۲۶$

مثال ۱ـ همچندی زیر را حل کنید

$$۵x - ۲ = ۲x + ۷$$

بنا باصل ۱ از دو طرف $۲x$ تفریق می‌کنیم نتیجه میشود

$$۳x - ۲ = ۷$$

بعد ۲ یکه بر دو طرف می‌افزائیم (و یا آنکه ۲ـ را بطرف دوم میبریم موافق نتیجهٔ ۲ نمرهٔ ۲۹۵)
حاصل میشود $\quad ۳x = ۹$

حال دو طرف را بر ۳ تقسیم میکنیم (موافق اصل ۳) نتیجه میشود

$$x = ۳$$

مثال ۲ـ این همچندی را حل کنید

$$\frac{۳x}{۵} - ۲ = x + ۴$$

اول دو جملهٔ متشابه ۲ـ و ۴+ دو طرف را ساده میکنیم یعنی بنا باصل اول ۲ـ را بطرف دوم میبریم حاصل میشود

$$\frac{۳x}{۵} = x + ۶$$

بنا باصل ۲ دو طرف را در ۵ ضرب می‌کنیم این همچندی بدست میآید

$$۳x = ۵x + ۳۰$$

بعد $۵x$ را بطرف اول میبریم (باید نشانهٔ آنرا تغییر داد) نتیجه میشود

$$-۲x = ۳۰$$

باین ترتیب یکطرف فقط دارای مجهول و طرف دیگر فقط دارای مقدار معلوم شده است حال اگر دو طرف را بر ضریب مجهول تقسیم کنیم مقدار مجهول بدست میآید :

$x = -15$

پرسش های شفاهی

همچندیهای زیر را حل کنید :

$8h + 2 = 10$ $3x - 7 = 2$ $\frac{3c}{2} = 6$

$\frac{2e}{5} = 4$ $8h = 16 + 2h$ $2x + 2 = 0$

$-6l = -18$ $7d + 7 = -14$ $5m - 3 = 13$

$\frac{4x}{3} = -40$ $3y - 4 = 5$ $7S - 2 = 12$

۹۸- همچندی یک مجهولی درجهٔ اول - هرگاه یک همچندی پس از بکار بردن اصلهای بالا بصورت $ax = b$ درآید گویند آن همچندی یک مجهولی از درجهٔ اول است (x مجهول و a و b معلومهای همچندی اند)

۹۹- قاعده برای حل همچندیهای یک مجهولی درجهٔ اول - بنابر آنچه گفته شد برای حل همچندیهای یک مجهولی درجهٔ اول بهتر این است که عمل های زیر را منظماً باجرا نمائیم :

نخست - ساده کردن جمله های متشابه در دو طرف همچندی ؛ از روی اصل ۱ یعنی که جمله های دو طرف پس از این عمل با هم متشابه نباشند

دوم - از میان بردن مخرجها با ضرب دو طرف همچندی در کوچکترین مضرب آنها

(از روی اصل ۲) اگر بچندی برخه باشد

سوم - بردن جمله های مجهول بیکطرف و معلوم ها بطرف دیگر (از روی اصل ۱)

چهارم - جمع جبری جمله های هر طرف

پنجم - تقسیم دو طرف بر ضریب مجهول (بنا باصل ۳)

عین این قاعده در مثال ۲ از شماره پیش بکار رفته است

مثال - مطلوبست حل $6x - 7 = 3x + 2$ جملهٔ $3x$ را بطرف اول و -7 را بطرف دوم میبریم نتیجه میشود

$6x - 3x = 2 + 7$ و یا $3x = 9$

و پس از تقسیم دو طرف بر ۳ (ضریب مجهول) حاصل میشود $x = 3$

تمرین

بچندیهای زیر را حل کنید:

$a + 14 = 2 - 3a$ $\qquad$ $3x + 2 = 6 + x$

$4z + 3 - z + 5 = z - 10$ $\qquad$ $4z + 2 = 2z$

$4K - 3 = 5K - 16 + 4K - 2$ $\qquad$ $5y - 1 = 2y + 5$

$5x - (3 + 2x) = 9 - 4x$ $\qquad$ $x - (8 - x) = 10$

$9x - 22 - 2x = 100 - 11x - 42$

$z^2 - z + 1 = z^2 + z - 1$ $\qquad$ $y^3 - y = y^3 - 1$

$$۲z^2 - ۳z + ۷ = ۲z^2 + ۵z - ۱۵$$

$$۳x + ۳۹ - ۳۵x = ۴۲ - ۲۰x - ۸$$

$$۴y + ۶ - ۳y + ۸ = ۲y + ۲ - ۳y - ۸ + ۵y$$

$$۲x - ۹ = ۸x + ۱۰ = ۱۵ + ۵x - ۷$$

$$۵z + ۱۰ + ۸z - ۷ + ۳z = z - ۷$$

$$۱۳ + ۱۲a + ۱۱ - ۱۰a = ۱۰a - ۱۱ - ۱۲a - ۱۳$$

$$۳x + ۶ - (۴ - ۷x) = ۱۹x - (۱۱x - ۴)$$

$$a^2 - (۲a - ۳) = ۶ - (۷ - ۲a) + a^2$$

مثال ـ مطلوبست حل همچندی

$$\frac{۲x}{۶} - ۶ + \frac{۳x}{۸} + \frac{۱۵}{۴} = ۱۴ + \frac{x}{۶}$$

پس از ساده کردن جمله های متشابه دو طرف ($\frac{۲x}{۶}$ و $\frac{x}{۶}$ همچنین ۶- و ۱۴) نتیجه میشود

$$\frac{x}{۶} + \frac{۳x}{۸} + \frac{۱۵}{۴} = ۲۰$$

دو طرف این همچندی را در عدد ۲۴ (کوچکترین مضرب برخه نماها) ضرب می کنیم این همچندی بدست میآید

$$۴x + ۹x + ۹۰ = ۴۸۰$$

یا $۱۳x = ۳۹۰$ و از آنجا $x = ۳۰$

تمرین

همچندیهای زیر را حل کنید

$$\frac{2a}{5}+\frac{3a}{2}=19 \qquad \frac{5a}{3}+\frac{3a}{4}-36{,}25=0$$

$$\frac{x}{3}+\frac{1}{6}=\frac{x}{2} \qquad \frac{2y}{3}-\frac{y}{2}+\frac{4y}{5}=29$$

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{7}-\frac{x}{2}=15-x$$

$$\frac{2x}{7}-8=\frac{29x}{28}+\frac{4}{5}-\frac{3x}{4}-\frac{44}{5}$$

$$\frac{3z}{4}-\frac{5z}{12}=\frac{5z}{9}+6-\frac{2z}{9}$$

$$y-\frac{3y}{2}+9=\frac{2y}{3}+4+\frac{5y}{6}-\frac{6y}{5}+\frac{1}{5}$$

$$2x-3=2{,}25x-5-0{,}4x+2{,}6$$

$$\frac{a}{2}-\frac{a}{3}+\frac{a}{4}-\frac{a}{6}+\frac{a}{8}+\frac{a}{12}=11$$

$$b=1+\frac{b}{2}+\frac{b}{4}+\frac{b}{8}+\frac{b}{16}+\frac{b}{32}$$

ج ـ ضرب عبارتهای جبری

۱۰۰ـ فرض میکنیم مقصود بدست آوردن حاصل ضرب یکجمله $5a^3c$ در یک جمله $-3a^2b$ باشد. این حاصل ضرب را میتوان نوشت $-3a^2b\times 5a^3c$ و چون هر یک جمله تشکیل شده است از حاصل ضرب چند سازه بنابراین حاصل ضرب مساویست با حاصل ضرب سازه های آنها در یکدیگر یعنی:

$$-3a^2b\times 5a^3c=-3\times a^2\times b\times 5\times a^3\times c$$

وچون میتوان در حاصل ضرب چند سازه جای آنها را بخواه تغییر داد پس این حاصل ضرب را میتوان چنین نوشت :

$$-3a^2b \times 5a^3c = -3 \times 5 \times a^2 \times a^3 \times b \times c$$

و یا بنا بر ضرب توانها

$$-3a^2b \times 5a^3c = -15a^5bc$$

روشن است که این تساوی بازاء هر عددی که بجای حرف بگذارد و درست است.

همینطور

$$2a^2b \times 3abx = 6a^3b^2x$$

$$2a^2b \times (-3abx) = -6a^3b^2x$$

$$-2a^2b \times 3abx = -6a^3b^2x$$

$$-2a^2b \times (-3abx) = 6a^3b^2x$$

یعنی در ضرب دو یا چند یک جمله قاعده نشانها بکار میرود

از بیان بالا قاعده زیر بدست میاید :

۱۰۱- قاعده - حاصل ضرب دو یا چند یکجمله خود یکجمله ایست که ضریبش حاصل ضرب ضریبهای عددی آن یکجمله ها (با قید نشانه) بوده و تمام حرفهای آن یک جمله ها را داشته باشد نمای هر یک از این حرفها مساوی مجموع نماهائیست که آن حرف در هر یک جمله دارد

مثلا

$$(-2\sqrt{3}\,ax^2y)(-2\sqrt{5}\,bxy^3) = 6\sqrt{15}\,abx^3y^4$$

پرسش های ساده

حاصل ضرب های زیر را بدست آورید:

$2a^2(-4a^3x)$ $\qquad$ $3a^3c \cdot 2c^2$ $\qquad$ $(-3x)(2x^3)$

$(-2\sqrt{3})(-5\sqrt{6})$ $\qquad$ $5a^2y(-2ay^3)$ $\qquad$ $(-4a^3x)(3ax^2)$

$(-3z)^2$ $\qquad$ $(-2a^2)^3$ $\qquad$ $3k^2(-k)^3$

$(-2\sqrt{3}x)^2$ $\qquad$ $(-\sqrt[3]{3}\,xy^2)^3$ $\qquad$ $(2\sqrt{2})^2(-a^2)^3$

$(-3x)^2(a^2x)(-5abx^2)$

۱۰۲ـ **ضرب یکجمله در چند جمله** ـ چون بجای حرفها مقدار عددی گذاریم چند جمله حرفی تبدیل بمجموع جبری چند عدد میشود و یک جمله تبدیل بیک عدد پس برای ضرب یکجمله در چند جمله میتوانیم مانند ضرب یکعدد در مجموع جبری چند عدد (نمره ۴۹) عمل کنیم ازینقرار:

یک جمله مفروض را در هریک از جمله های چند جمله ضرب کرده حاصل ضربهای جزء را با هم جمع می کنیم

مانند

$(2a^2-3ax+4x-6)\times 2ax=$

$2a^2\times 2ax+(-3ax)\times 2ax+4x\times 2ax+(-6)\times 2ax=$

$4a^3x-6a^2x^2+8ax^2-12ax$

تمرین

عبارتهای زیر را ساده نموده بازاء $a=-2$ و $b=-1$ و $c=0$ و

$x=1$ و $y=$ درستی عمل را تحقیق کنید

برای نمونه این مثال حل میشود

مثال - میخواهیم عبارت $2x^2(x-y)-y(-2x^2+y)$ را ساده نموده و بازاء مقدارهای عددی x و y درستی عمل را تحقیق کنیم

اما عمل چنین است :

$$2x^2(x-y)-y(-2x^2+y)=2x^3-2x^2y+2x^2y-y^2$$

$$=2x^3-y^2$$

بازاء $x=1$ و $y=2$ مقدار عددی حاصل $2(1)^3-(2)^2=2-4=-2$

است

و مقدار عددی عبارت مفروض نیز

$$2(1-2)-2(-2+2)=-2-2(0)=-2$$

میباشد

$$xy(a-b)-ab(z-y)+bc(a-x)$$

$$2a[x(ax-by)-y(bx-ay)]$$

$$2a\sqrt{x}(ab-b\sqrt{x}-\sqrt{x})-5c\sqrt{y}(cy-\sqrt{y})$$

$$2a\sqrt{x}(5a^2-3b\sqrt{x})-(4a^2-3b\sqrt{x})$$

$$b^2c[(a-c)-ab(a-b)]$$

$$x(a+b)-b(a-c)+a(b-x)-c(x-y)$$

مثال ۵ ـ مطلوبست محاسبهٔ عبارت.

$$P = \sqrt{۳}\ [۴\sqrt{۱۲} - ۲\sqrt{۳} - (\sqrt{۷۵} - \sqrt{۴۸})]$$

ابتدا پرانتز درون کروشه را حذف میکنیم بعد $\sqrt{۳}$ را در هریک از جمله های درون آن ضرب

مینمائیم نتیجه میشود

$$P = ۴\sqrt{۳۶} - ۲\sqrt{۹} - \sqrt{۲۲۵} + \sqrt{۱۴۴}$$

وچون $\sqrt{۳۶} = ۶$ و $\sqrt{۹} = ۳$ و $\sqrt{۲۲۵} = ۱۵$ و $\sqrt{۱۴۴} = ۱۲$

بنابراین

$$P = ۲۴ - ۶ - ۱۵ + ۱۲ = ۱۵$$

ونیز درین مثال میتوان پیش از ضرب در $\sqrt{۳}$ هرکدام از رادیکال های درون کروشه را ساده نموده بعد

حاصل کروشه را در $\sqrt{۳}$ ضرب کنیم از اینقرار:

$$\sqrt{۷۵} = \sqrt{۲۵ \times ۳} = ۵\sqrt{۳} \quad \text{و} \quad \sqrt{۱۲} = \sqrt{۴ \times ۳} = ۲\sqrt{۳}$$

و $\sqrt{۴۸} = \sqrt{۱۶ \times ۳} = ۴\sqrt{۳}$

بنابراین عبارت P چنین میشود

$$P = \sqrt{۳}\ (۸\sqrt{۳} - ۲\sqrt{۳} - ۵\sqrt{۳} + ۴\sqrt{۳})$$

یا: $P = \sqrt{۳} \cdot ۵\sqrt{۳} = ۱۵$

تمرین

۱ـ حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$\sqrt{2}\,(3\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} - 2\sqrt{72})$$

$$(2\sqrt{6} - \sqrt{12} - \sqrt{24} + \sqrt{48})\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}\,(5\sqrt{24} - 4\sqrt{32} + 3\sqrt{50} - 3\sqrt{54})$$

$$4\sqrt{2}\,(\sqrt{2} + 2\sqrt{18}) - \sqrt{6}\,(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$$

$$5\sqrt{7}\,(3\sqrt{7} + 10\sqrt{5}) - 2\sqrt{5}\,(3\sqrt{7} - 5\sqrt{5})$$

$$3\sqrt{2}\,\left[(7\sqrt{2} - 5\sqrt{6}) - (3\sqrt{8} - 4\sqrt{20})\right]$$

$$4\sqrt{10}\,\left[2\sqrt{20} + 3\sqrt{18} - (7\sqrt{8} + 3\sqrt{5})\right]$$

۲ـ درآمد ۱۲ روزه شخصی a ریال است و مخارج ۷ روزه او b ریال تعیین کنید اندوخته او را در مدت x روز و وقتیکه $a=96$ ریال و $b=28$ ریال و $x=15$ باشد پس انداز او را بدست آورید

۳ـ بوسیله دو مجری آب داخل استخری میشود اولی در هر سه ساعت a ذرع مکعب و دومی در هر پنج ساعت b ذرع مکعب آب داخل آن میکند این استخر دارای زیرآبیست که در هر چهار ساعت c ذرع مکعب آب آنرا خارج مینماید معلوم کنید اگر هر سه یکمرتبه باز باشند در x ساعت چند ذرع مکعب آب داخل استخر میشود

مثال ـ مطلوبست حل بحپندی

$$3x(x-1) = 2x^2 + 4x - 1$$

پس از ضرب نتیجه میشود

$$3x^2 - 3x = 2x^2 + 4x - 1$$

و پس از ساده کردن جمله های متشابه دو طرف این همچندی بدست می آید

$6x=1$ ، و از آنجا $x=\frac{1}{6}$

تمرین

همچندیهای زیر را حل کنید :

$4(x+1)-4=3(x-1)$ $\qquad$ $4(3y-5)+20=3(y+9)$

$9p-3(2p-4)=2(5-p)+7$

$3y-9(3y+4)=3(y+9)$

$5(3a-1)-7a=3(a+6)-4$

$x-2(2x-3)-(x+6)=8-7(2-x)$

$7(3x-6)+5(x-3)+4(12-x)=-11$

$2z(z-2)+5z=z(3z-4)+6$

$2y-(5y-y+1)=-(3+y)+15$

مثال - مطلوبست حل همچندی

$$\frac{5}{6}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{7}{6}\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{7}\right)=4+\frac{8}{9}$$

پس از ضرب نتیجه میشود

$$\frac{5}{6}x-\frac{5}{18}+\frac{7}{30}x-\frac{1}{6}=\frac{44}{9}$$

دو طرف این همچندی را در عدد ۹۰ که کوچکترین مضرب برخنماها است ضرب

میکنیم حاصل میشود

$$۲۵x - ۲۵ + ۲۱x - ۱۵ = ۴۴۰$$

ویا

$$۲۵x + ۲۱x = ۴۴۰ + ۲۵ + ۱۵$$

پس از ساده کردن جمله های متشابه نتیجه میشود

$$۹۶x = ۴۸۰$$

واز آنجا

$$x = ۴۸۰ : ۹۶ = ۵$$

تمرین

این مجهولی را حل کنید:

$$\frac{۱}{۴}(۲۷ - x) = \frac{۹}{۲} + \frac{۱}{۱۰}(۷x - ۵)$$

$$۱ - ۳\left(۷\frac{۱}{۲} + x\right) + ۷\left(\frac{۲x}{۳} - \frac{۵}{۲}\right) + \frac{۸x}{۳} = ۵۰$$

$$\frac{x - ۱}{۷} - \frac{۲۳ - x}{۵} = \frac{x + ۴}{۳} - ۶$$

$$\frac{۸ - x}{۶} + x - ۱\frac{۳}{۴} = \frac{x + ۶}{۲} - \frac{x}{۳}$$

$$\frac{۵a - ۲}{۳} - \frac{a - ۸}{۴} = \frac{a + ۱۴}{۲} - ۳$$

$$\frac{a - ۲}{۳} - \frac{۱۲ - a}{۲} = \frac{۵a - ۳۶}{۴} - ۱$$

$$\frac{۲x - ۵}{۳} - \frac{۵x - ۳}{۴} + ۲\frac{۲}{۳} = ۰$$

$$\frac{۲y + ۱}{۳} + \frac{۲y - ۵}{۱۰} = ۲ + \frac{۳y - ۱}{۱۵}$$

$$\frac{۳z + ۱}{۱۳} + \frac{۲z - ۵}{۳} = \frac{۴z - ۱}{۵} + \frac{۲ - z}{۲}$$

$$\frac{۴z - ۱}{۱۰} - \frac{۱۰ - z}{۳} + \frac{۲z + ۱}{۶} = ۶\frac{۱}{۶}$$

$$\frac{۳-۲x}{۳}-\frac{۴-x}{۴}=\frac{۳x-۳٫۸۵}{۰٫۵}$$

۵)

$$\frac{۵x-۰٫۴}{۰٫۳}+\frac{۱٫۳-۳x}{۲}=\frac{۱٫۸-۸x}{۱٫۲}$$

$$\frac{۵a-۱٫۵}{۷}-\frac{۵(۰٫۴-۲a)}{۶}=\frac{۹a-۰٫۷}{۴}-\frac{۷a-۱٫۱}{۳}$$

$$\frac{۴(۱۳a-۰٫۶)}{۵}+\frac{۳(۱٫۲-a)}{۱۰}=\frac{۹a+۰٫۲}{۲۰}+\frac{۵+۷a}{۴}+a$$

۱۰۳- ضرب دو چند جمله - چون بجای حرفها مقدار عددی قرار دهیم چند جملهٔ حرفی تبدیل بچند جملهٔ عددی میشود بنابراین برای ضرب دو چند جمله میتوان قاعدهٔ (نمرهٔ ۵۰) را بکار برد:

۱۰۴- قاعدهٔ ضرب دو چند جمله - باید هر یک از جمله های یکی از آنها در کلیهٔ جمله های چند جملهٔ دیگر ضرب نموده حاصل ضربهای جزء را جمع جبری نمود.

راه عمل از مثالهای زیر معلوم میشود

مثال ۱- مطلوبست تعیین حاصل ضرب $۲x-۵$ در $۳x+۲$ مانند حساب یکی ازین دو سازه را زیر سازهٔ دیگر نوشته عمل میکنیم بدین طریق:

$$\begin{array}{l} ۲x-۵ \\ ۳x+۲ \\ \hline ۶x^۲-۱۵x \\ \quad +۴x-۱۰ \\ \hline ۶x^۲-۱۱x-۱۰ \end{array}$$

حاصل ضرب سازهٔ $۲x-۵$ در $۳x$ .... $۶x^۲-۱۵x$

« « $۲x-۵$ در $+۲$ .... $+۴x-۱۰$

مجموع حاصل ضربهای جزء و حاصل ضرب کل .... $۶x^۲-۱۱x-۱۰$

برای آسانی عمل چنانکه می بینید بهتر آنستکه در نوشتن حاصل ضربهای جزء جمله های متشابه

آنها زیر یکدیگر نوشته شود

مثال ۲- عبارت $۲a^۳ + ۳a^۲ - ۴a - ۷$ را در عبارت $a^۲ - ۵a - ۶$
ضرب نموده بازاء $a=۲$ درستی عمل را امتحان کنید

برای آسانی این عبارتها را بحسب توانهای صعودی یا نزولی a مرتب نموده مانند مثال ۱
عمل میکنیم مثلاً اگر این دو بسازه را بحسب توانهای نزولی a مرتب کنیم خواهیم داشت

$$
\begin{array}{rcl}
۲a^۳ + ۳a^۲ - ۴a - ۷ & = & ۱۶ + ۱۲ - ۸ - ۷ = ۱۳ \\
a^۲ - ۵a - ۶ & = & ۴ - ۱۰ - ۶ = -۱۲ \\
\hline
۲a^۵ + ۳a^۴ - ۴a^۳ - ۷a^۲ & & -۱۵۶ \\
-۱۰a^۴ - ۱۵a^۳ + ۲۰a^۲ + ۳۵a & & \\
-۱۲a^۳ - ۱۸a^۲ + ۲۴a + ۴۲ & & \\
\hline
۲a^۵ - ۷a^۴ - ۳۱a^۳ - ۵a^۲ + ۵۹a + ۴۲ & & \text{حاصل ضرب}
\end{array}
$$

که بازاء $a=۲$ حاصل ضرب چنین میشود:

$$۶۴ - ۱۱۲ - ۲۴۸ - ۲۰ + ۱۱۸ + ۴۲ = -۱۵۶$$

ازین دو مثال دستور عمل ضرب دو چند جمله بدست میآید ازینقرار:

اوّل دو چند جمله را بحسب توانهای نزولی یا صعودی یکی از حرفها مرتب نموده آنها را
زیر هم مینویسیم (بهتر آنستکه چند جمله کوچکتر یعنی آنکه عده جمله هایش کمتر است زیر چند جمله دیگر نوشته
شود) بعد هر یک از جمله های پائین را در جمله های بالا ضرب میکنیم و این حاصل ضربهای جزء را
هر کدام در یک سطر زیر یکدیگر طوری مینویسیم که جمله های متشابه در یک ستون قرار گیرد بطوریکه
عمل جمع جمله های متشابه آسان باشد. بعد از جمع جبری جمله های سطرها حاصل ضرب بدست میآید.

تمرین

حاصل ضربهای زیر را بدست آورید:

$2x-4$ در $2x^2-2x-8$

y^2+2y-3 در $3y^2-8y-1$

x^2-2x+4 در x^3-x-5

$5-a^2+a$ در $3a^2-5a^3+a+1$

$5x-2a+(2a-5x)$ در $5x-2a-(2a-5x)$

$2+a^3-2a+3a^2$ در $3a-4a^2+6+a^3$

$$(a-b)^2 \cdot (a+b)^2 \cdot (a-b+1)^2$$

$$(a+b)^3 \quad ; \quad (a-b)^3 \quad ; \quad (x^2-2ax+a^2)^2$$

$$(a-b)(a+b) \quad ; \quad (x^2y-xy^2)(x^2y+xy^2)$$

$$(x^2y-xy^2)(3xy-4x^2y)(2x^2y-xy^2)$$

$$(m^2+p^2+q^2-mp-mq-pq)(m+p+q)$$

مثال - مطلوبست حل تحقیقی

$$(3x-1)(2x+5)=(2x+3)^2+2x^2-13$$

پس از عمل ضرب نتیجه میشود

$$6x^2+13x-5=4x^2+12x+9+2x^2-13$$

و چون جمله های متشابه دو طرف را ساده کنیم حاصل میشود

$$x = 1$$

تمرین

همچندیهای زیر را حل کنید:

$$(x-4)(x+8) = 7-(2-x)(x+3)$$

$$(a+2)^2-(a+3)^2 = -17$$

$$(3x-6)(4x-8) = 12x^2-96$$

$$(x+3)(x+5) = (x+15)(x-10)$$

$$(2y-7)(3y+4) = (y-1)^2+5y^2-11$$

$$(x-5)(x+3)(x+2)-5 = (x^2-x-1)(x+1)$$

$$(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)-(x+2) = (x^2+2)^2+20$$

و ـ بخش دو عبارت جبری

۱۰۵ ـ تعریف ـ غرض از بخش کردن (تقسیم کردن) عبارت جبری a (بخشی یا مقسوم) بر عبارت جبری b (بخش یاب یا مقسوم علیه) پیدا کردن عبارتیست مانند c (بهر یا خارج قسمت) بقسمی که حاصل ضرب c در b مساوی a گردد

پس بنا بتعریف بالا این اتحاد را خواهیم داشت

$$a = bc \qquad (1)$$

وچون خارج قسمت a بر b را میتوان بصورت $\frac{a}{b}$ نوشت

پس خواهیم داشت

$$c = \frac{a}{b} \qquad (۲)$$

یعنی خارج قسمت a بر b برخهٔ $\frac{a}{b}$ است که هرگاه آنرا در بخش یاب (b) ضرب کنیم بخشی (a) بدست میآید

بنابراین دو تساوی (۱) و (۲) از یکدیگر نتیجه شده اند

مثال:

$5 \times x = 5x$ زیرا $5x : x = \frac{5x}{x} = 5$

$ax \times x^2 = ax^3$ « $ax^3 : x^2 = \frac{ax^3}{x^2} = ax$

$-2a^3 \times a^2 = -2a^5$ « $-2a^5 : a^2 = \frac{-2a^5}{a^2} = -2a^3$

$\frac{3}{4} \times (-4) = -3$ « $-3 : -4 = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

همچنین $m^5np^3 : m^3p^2 = \frac{m^5np^3}{m^3p^2} = m^{5-3}n \cdot p^{3-2} = m^2np$

زیرا $m^2np \cdot m^3p^2 = m^5np^3$

و $12a^2x^3y : -5x^2y = \frac{12a^2x^3y}{-5x^2y} = -\frac{12}{5}a^2x$

زیرا $-\frac{12}{5}a^2x \cdot (-5x^2y) = 12a^2x^3y$

۱۰۶ـ برای یافتن ساده ترین عبارت بهر (یعنی ساده ترین عبارت $\frac{a}{b}$ (برخهٔ ۶۰) را بکار میبریم که هرگاه بخشی و بخش یاب را در سازه ای ضرب یا بر سازه ای تقسیم کنیم بهر تغییر نمی کند

چنانکه بهره $\frac{5x}{x}$ را میتوان بصورت ساده ۵ نوشت (از تقسیم بخشی بخش یاب بر x)

و همچنین در بخش $2a^5$ بر a^2 بهره مساویست با $2a^3$ (از تقسیم کردن بخشی و بخش یاب بر a^2)

درین دو بخش می‌بینیم که ساده ترین صورت بهره عبارتیست صحیح.

و در تقسیم $6a^2b$ بر $2ab^2$ ساده ترین صورت بهره بر خارج قسمت مساوی $\frac{3a}{b}$

و در تقسیم $5x^2y$ بر $3ab$ بهره $\frac{5x^2y}{3ab}$ است که هیچ ساده نمیشود

اینک برای بدست آوردن ساده ترین صورت خارج قسمت‌ها و عبارت جبری حالتهای زیر را در نظر میگیریم:

۱۰۷ - حالت اول - تقسیم یک جمله بر یک جمله - برای بدست آوردن ساده ترین عبارت بهره کافیست که بخشی و بخش یاب را بر سازه های مشترک تقسیم کنیم

مانند $\frac{-2a^2x}{a}=-2ax$ و $\frac{5a^3}{a^2}=5a$ و $\frac{-7xy^2}{-5ax^2}=\frac{7xy^2}{5ax^2}$

و $\frac{12a^6x^2}{-8ax^3}=-\frac{3a^5}{2x}$ ازین چند مثال معلوم میشود:

هرگاه بخشی شامل همه سازه های بخش یاب با نمای بزرگتر یا مساوی باشد درینصورت بهره یک جمله درست میشود (مانند دو مثال اول) و درغیر اینحالت بهره برخه خواهد بود (مانند مثالهای سوم و چهارم).

پرسش های شفاهی

در هر یک از بخشهای زیر بهره را بدست آورید:

a^6 بر $-a^{12}$ ، a^3 ، ۱ بر a^5

$-x^8$ بر $-x^2$ ، xy^3 بر $-xy$

$15ax^3$ ، $-3bx^2$ ، $-22a^2b^6$ ، $-2a^3b^2$

$-38x^6y^6$ ، $-16x^4y^5$ ، $-30a^4b^3$ ، $-4a^3b^1$

$-45a^4xy^8$ ، $-9a^1x^3y^7$ ، $-25a^2x^2y^5$ ، $-50a^3x^5y^2$

$2a^4$ ، $-3b^2$ ، $5ax^2$ ، $-10bx^4$

$-3x^2y$ ، $-15xy^2$ ، $36x^2ab^2$ ، $24xa^2y$

۱۰۸- حالت دوم- تقسیم چند جمله بر یک جمله- هر یک از جمله های بخشی را بر بخش یاب تقسیم نموده (موافق نمره پیش) بهرهای جزء را جمع جبری مینمائیم

مثال ۱- در تقسیم $x^3 - x^4$ بر x^2 بهر چنین است

$$\frac{x^3 - x^4}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} - \frac{x^4}{x^2} = x - x^2$$

زیرا

$$(x - x^2)\, x^2 = x^3 - x^4$$

مثال ۲- تقسیم $15x^2y - 3x^3y^2 + 12x^3$ بر $-3xy$ بهر چنین است

$$\frac{15x^2y}{-3xy} + \frac{-3x^3y^2}{-3xy} + \frac{12x^3}{-3xy} = -5x + x^2y - \frac{4x^2}{y}$$

پرسش های شفاهی

مطلوب است تعیین بهرهای زیر:

$$\frac{6x^2 - 6x}{2x} \quad , \quad \frac{x^2y - x^3}{x^2}$$

$$\frac{25x^2y^2 + 30xy^3}{-5xy} \quad , \quad \frac{8ax - 10a^2x^2}{-2ax}$$

$$\frac{5(x+y)+b(x+y)}{x+y} \quad \text{و} \quad \frac{2(a+b)-3(a+b)^2}{a+b}$$

$$\frac{2a(3x-4)-4a(3x-4)}{3x-4}$$

$$\frac{x-y-3(x-y)}{-2(x-y)} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{3x^3}-2\sqrt{3xy}}{\sqrt{3x}}$$

$$\frac{a^2bx-aby^2}{abc} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{6}(m-2)-\sqrt{3}(m-2)}{\sqrt{3}(m-2)}$$

$$\frac{x^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-2x(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{x(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

۱۰۹- حالت سوم - تقسیم چند جمله بر چند جمله - برای تعیین صورت ساده بهتر در اینحالت مانند حساب عمل تقسیم را انجام میآوریم

فرض میکنیم مقصود بخش کردن عدد ۹۹۲ بر ۳۱ باشد صورت عمل چنین است:

$$\begin{array}{r|l} 992 & 31 \\ \cline{2-2} -93 & 32 \\ \cline{1-1} 62 & \\ -62 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

و چون

$$992 = 9 \times 10^2 + 9 \times 10 + 2$$

$$31 = 3 \times 10 + 1$$

میتوان تقسیم بالا را بدین صورت نوشت

$$\begin{array}{r|l} 9 \times 10^2 + 9 \times 10 + 2 & 3 \times 10 + 1 \\ \cline{2-2} -9 \times 10^2 - 3 \times 10 \quad\quad & 3 \times 10 + 2 \\ \cline{1-1} +6 \times 10 + 2 & \\ -6 \times 10 - 2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

درین تقسیم اگر بجای ۱۰ عدد کلی a را قرار دهیم معلوم میشود که در تقسیم چند جمله $9a^2+9a+2$ بر $3a+1$ بهر مساوی $3a+2$ میباشد

صورت عمل چنین است :

$$\begin{array}{l|l} 9a^2+9a+2 & 3a+1 \\ \cline{2-2} -9a^2-3a & 3a+2 \\ \hline \quad\;\; +6a+2 & \\ \quad\;\; -6a-2 & \\ \hline \end{array}$$

ازین مثال میتوان قاعده زیر را نتیجه گرفت :

۱۱۰ - قاعده - پس از ساده کردن چند جمله های مقسوم و مقسوم علیه آنها را نسبت بتوانهای نزولی (یا صعودی) یکی از حرفها مرتب نموده بطریقه زیر عمل مینمائیم :

جمله اول بخشی را بر جمله اول بخش یاب قسمت نموده بهر را در تمام جمله های بخش یاب ضرب می نمائیم و حاصل را از جمله های بخشی میکاهیم تا نخستین مانده بدست آید از نو جمله اول مانده را بر جمله اول بخش یاب قسمت نموده بهر را در تمام جمله های بخش یاب ضرب مینمائیم و حاصل را از جمله های این مانده کم می کنیم تا دومین مانده بدست آید و بهمین طریق عمل را ادامه میدهیم تا به مانده صفر و یا بمانده ای برسیم که درجه اش از درجه بخش یاب کمتر باشد.

مثال ۱ - مطلوبست تعیین بهر در تقسیم $a^3+2a^2b-b^3$ بر $a+b$

چون چند جمله بخشی و بخش یاب را برحسب حرف a مرتب نموده از روی قاعده بالا عمل کنیم نتیجه میشود

$$\begin{array}{l|l} a^3 + 2a^2b \quad - b^3 & a+b \\ -a^3 - a^2b & \overline{a^2 + ab - b^2} \\ \hline \quad a^2b & \\ \quad -a^2b - ab^2 & \\ \hline \quad\quad -ab^2 - b^3 & \\ \quad\quad +ab^2 + b^3 & \\ \hline \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

دراین بخش بخشی بر بخش یاب بخش پذیر (قابل قسمت) بوده و میتوان چنین نوشت

$$a^3 + 2a^2b - b^3 = (a+b)(a^2 + ab - b^2)$$

مثال ۲- a^3 را بر $a-1$ تقسیم کنید

از روی قاعدهٔ بالا راه عمل چنین است

$$\begin{array}{l|l} a^3 & a-1 \\ -a^3 + a^2 & \overline{a^2 + a + 1} \\ \hline \quad +a^2 & \\ \quad -a^2 + a & \\ \hline \quad\quad +a & \\ \quad\quad -a + 1 & \\ \hline \quad\quad\quad +1 & \end{array}$$

درین مثال بهر را که بصورت $\frac{a^3}{a-1}$ است میتوان چنین نوشت

$$\frac{a^3}{a-1} = a^2 + a + 1 + \frac{1}{a-1}$$

زیرا اگر دو طرف بهر را در $a-1$ (بخش یاب) ضرب کنیم a^3 (بخشی) بدست میاید

درینجا میگوئیم بخشی بر بخش یاب بخش پذیر نیست و بهر یعنی $a^2 + a + 1 + \frac{1}{a-1}$

تشکیل شده است از جزء درست $a^2 + a + 1$ و جزء برخه $\frac{1}{a-1}$. عدد ۱+ را ماندهٔ این تقسیم گویند.

تبصره - فرض میکنیم Q جزء درست بهر و R ماندهٔ تقسیم A بر B باشد بنا بر آنچه گفتیم خواهیم داشت:

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B} \quad (1)$$

اگر بخصوص $R = 0$ باشد تقسیم درست است و خواهیم داشت

$$\frac{A}{B} = Q$$

اگر دو طرف تساوی (۱) را در B ضرب کنیم این تساوی بدست میآید

$$A = BQ + R \quad (2)$$

یعنی بخشی مساویست با مجموع مانده و حاصل ضرب بخش یاب در جزء درست بهر

و در حالتیکه مانده صفر باشد تساوی (۲) نوشته میشود

$$A = BQ$$

یعنی بخشی مساویست با حاصل ضرب بخش یاب در بهر.

تمرین

در هریک از تقسیمهای زیر بهر را بدست آورید

$a^2 + 10a + 24$ بر $a + 4$

$۲p^۲-۳p-۲$ بر $۲p+۱$

$x^۲+x-۶$ ، $x-۲$

$y^۳-۱۱y-۶$ ، $y+۳$

$۶y^۲+۱۹y-۷$ ، $۳y-۱$

$۲a^۲+ab-۲b^۲$ ، $۲a-b$

$۹x^۲+۶xy-۸y^۲$ ، $۳x-۲y$

$۲a^۳+ab-۲b^۲$ ، $۳a-۲b$

$۲a^۳-۱۴a^۲+۱۴a-۱۲$ ، $۲a-۴$

$۳۷x+۶x^۳-۲۴-۲۲x^۲$ ، $۲x-۳$

$۳y^۴+۱۱y^۳-۲y^۲+۱۷y-۴$ ، $y-۳y^۲-۴$

$۲۸x^۴-۹۰x^۳y+۱۵۶x^۲y^۲+۹xy^۳+۲۸y^۴$

$۴x^۲-۱۰xy$

$(۵۳a+۸-۵۲a^۲+۱۲a^۳)$ بر $(۴a^۲-۷a-۱)$

$(x^۳-y^۳):(x\pm y)$ و $(x^۳+۸):(x+۲)$

$(x^۴-۱۶):(x\pm ۴)$ و $(۲۷x^۳+۸y^۳):(۳x+۲y)$

$(y^۶\pm ۱):(y\pm ۱)$ و $(a^۵\pm b^۵):(a\pm b)$

۱۱۱ - **چندجمله‌ایهای حرفی** - هرگاه در یک چندجمله‌ای مقادیر معلوم بصورت کلی یعنی بحرف نموده شده باشد چندجمله‌ای را چندجمله‌ای حرفی نامند

هر همچندی حرفی درجهٔ اول پس از از میان بردن برخه نماها و ساده کردن جمله های متشابه دو طرف بصورت کلی

$$ax = b$$ درمیآید

برای حل این همچندی یعنی برای تعیین x ریشهٔ آن باید دو طرف را بر a (ضریب x) تقسیم نمود (a باید مخالف صفر باشد)

تبصره ـ از تقسیم دو طرف تساوی $0 \times 5 = 0 \times 7$ بر صفر لازم میآید که $5=7$ باشد که محال است

بنابراین نباید هیچوقت دو طرف یک تساوی را بر صفر تقسیم نمود زیرا علاوه بر اینکه نمیتوان در تقسیم بعدد بر صفر بهر را بدست آورد ممکن است نتیجهٔ غلطی بدهد.

مثال ۱ـ مطلوبست حل همچندی

$$5x - 2a = 10a + 3x$$

مجهول را بیک طرف و معلوم را بطرف دیگر میبریم نتیجه میشود

$$5x - 3x = 10a + 2a$$

$$\therefore \quad 2x = 12a \qquad \text{و از آنجا} \qquad x = 6a$$

مثال ۲ـ مطلوبست حل همچندی

$$ax + 5a = a^2 + 6 + 3x$$

مانند مثال پیش نتیجه میشود

$$ax - 3x = a^2 - 5a + 6$$

پس از جمع دو جملهٔ متشابه طرف اول حاصل میشود

و یا

$$(a-3)x = a^2 - 5a + 6$$

$$x = \frac{a^2 - 5a + 6}{a-3} = a - 2$$

تمرین

۱- معادله‌های زیر را حل کنید

$5ax - 10a^2 = 5ac$; $mx + m = 5m$

$12a - 3(a-x) = 0$; $x - m = m + n$

$ay - (a-c) = 3a + c$

$3ax + 2ab = 6ab + 2ax - 3ab$

$mx + n^2 = 4m^2 - (mx - n^2)$

$ax + bx = a^2 - b^2$; $ax - 2a^3 - 1 = a^2 - x$

۲- دارائی شخصی را معلوم کنید درصورتیکه مبلغ پول موجود او a ریال و وام او b ریال باشد در حالتهای مخصوص یعنی کی $b < a$ و یا $b = a$ و یا $b > a$ باشد نتیجه را تعبیر کنید

۳- دو نفر اولی a ریال و دومی b ریال پول دارد اولی به دومی c ریال بدهکار است و دومی به اولی d ریال مبلغ دارائی هر یک چقدر میشود و تفاوت بین دارائی آنها چه مبلغ است؟

۴- شخصی در یک روز a ریال بحساب خود در بانک گذاشت و در همان روز b ریال از بانک گرفت معلوم کنید در این روز چه مبلغ بر پس انداز او علاوه شده است. اگر $a = 250$ و $b = 520$ باشد تعبیر جواب چیست؟

۵- زمینی است زراعتی به درازای a متر و به پهنای b متر و در آن خیابانی است به پهنای ۲٫۵ متر که در این زمین واقع شده حساب کنید مساحت قسمت زراعتی زمین را (در حالتهای مخصوص :

a = ۷۵ و b = ۴۶ همچنین a = ۱۲۵٫۱۵ و b = ۸۲٫۴۴)

۶- باغی را به مبلغ a ریال خریدیم و بمبلغ b ریال فروختیم معلوم کنید صدی چند عمل شده است

(حالتهای مخصوص a = ۱۲۰۰۰ و b = ۱۲۹۰۰ و همچنین a = ۸۴۰۰ b = ۷۵۰۰)

۷- پارچه‌ای پس از شستن باندازهٔ $\frac{۳}{۱۰۰}$ درازایش کوتاه میشود یک توپ از این پارچه پس از شستن بدرازای a متر شده است درازای آنرا پیش از شستن معلوم کنید (حالتهای مخصوص : a = ۲۳٫۹۵ و a = ۱۹٫۴)

۸- شخصی درازای مزرعه‌ای را با قدم خود اندازه گرفت خیال کرد که اگر درازای هر قدمش ۰٫۷۲ متر باشد با این حساب درازای مزرعه a متر میشود و بعد درازای قدمش را بطور متوسط اندازه گرفت معلوم شد که مساوی ۰٫۷۴ متر است معلوم کنید درازای حقیقی مزرعه را

۹- درازای پارچه‌ای با متری که b سانتیمتر کوتاه است a متر میباشد درازای واقعی آن چقدر است؟ (حالت مخصوص b = ۳ و a = ۱۵)

۱۰- اطاقی است بشکل مستطیل بدرازای a متر و به پهنای b متر میخواهیم سطح آنرا از آجری بشکل مربع بضلع ۲۰ سانتیمتر فرش کنیم چند آجر لازم است؟ (حالتهای مخصوص : a = ۱۲ و b = ۷ همچنین a = ۱۵ و b = ۸)

۱۱- شخصی a ریال پول دارد اگر b ریال بیشتر میداشت میتوانست $\frac{2}{5}$ بدهی خود را بپردازد معین کنید مبلغ بدهی او را (حالتهای مخصوص $a=150$ و $b=25$ همچنین $a=65$ و $b=70$)

۱۲- فاصله بین دو شهر d کیلومتر است اتومبیلی با تندی a کیلومتر در ساعت مدت t ساعت حرکت نموده چقدر تا شهر دوم فاصله دارد؟ (در حالت مخصوص $d=125$ و $a=50$ و ۲ یا $t=3$ در جواب مسئله تحقیق کنید)

۱۳- فاصله بین دو شهر d کیلومتر است مسافری قسمتی از آن را که a برابر قسمت دیگر است پیموده معلوم کنید چند کیلومتر پیموده و چند کیلومتر دیگر باقیمانده (حالتهای مخصوص: $d=120$ و $a=3$ همچنین $d=150$ و $a=4$)

۱۴- مسافری فاصله بین دو شهر را که d کیلومتر است در مدت t ساعت می‌پیماید بدین قسم که $\frac{3}{4}$ آن را با تندی متوسط a کیلومتر در ساعت طی کرده است معلوم کنید تندی متوسط مسافر را در بقیه راه (حالت مخصوص $d=180$ و $t=6$ و $a=40$)

۱۵- فاصله بین دو شهر d کیلومتر است اتومبیل A این فاصله را در t ساعت می‌پیماید اتومبیل B که دو دقیقه بعد از اتومبیل A حرکت کرده ۲۵ دقیقه زودتر از آن بشهر دوم میرسد معین کنید اولاً مدتی را که اتومبیل B در حرکت بوده ثانیاً تندی متوسط اتومبیل B را ثالثاً تفاوت تندیهای متوسط A و B را (حالت مخصوص $d=87$ و $t=3$)

۱۶- شناگری در دقیقه اول a متر و در هر دقیقه بعد ۲۵ سانتی‌متر کمتر از دقیقه پیش شنا میکند

معلوم کنید پس از ۴ دقیقه چند متر شناکرده است و درین مدت بطور متوسط دقیقه چند متر در آب جلو رفته است

۱۷- درازای استخر شنا d متر است اگر شناگری بتواند بطور متوسط دقیقه (a - ۰٫۷) متر در آب پیش رود پس از چند دقیقه درازای استخر را می پیماید (حالتهای مخصوص: $d = ۶۳٫۲۵$ و $a = ۳۷٫۲۵$ همچنین $d = ۴۳٫۶۵$ و $a = ۳۵٫۲۵$)

۱۸- باغیست بشکل مستطیل که درازای آن a متر بیش از پهنایش میباشد و پهنایش $\frac{2}{3}$ درازایش است حساب کنید درازا و پهنا و مساحت باغ را (حالتهای مخصوص: $a = ۸۰$ و $a = ۱۲۰$)

۱۹- قیمت a کیلوگرم گوشت b ریال است میدانیم که $\frac{1}{4}$ آن استخوان است معلوم کنید قیمت یک کیلوگرم گوشت بی استخوان را (حالت مخصوص $a = ۸$ و $b = ۲۲$)

۲۰- درآمد سالیانهٔ شخصی a ریال است و مخارجش b ریال معلوم کنید پس از چند سال مبلغ c ریال پس انداز خواهد کرد؟ حالت مخصوص ($a = ۱۲۰۰۰$ و $b = ۷۰۰۰$ و $c = ۱۵۰۰۰$)

۲۱- مبلغ a ریال بین ۵ نفر تقسیم میشود و دو نفر آنها هر یک b ریال بیشتر سهم میبرند حساب کنید سهم هر یک را (حالت مخصوص $a = ۱۵۰$ و $b = ۱۲٫۵$)

۲۲- هر ۳۵ یارد تقریباً مساوی ۳۲ متر است معلوم کنید m متر چند یارد و y یارد چند متر است؟

۲۳- هر ده سانتی متر تقریباً مساوی ۲٫۱۵ اینچ است دستور تبدیل c سانتی متر را به i اینچ پیدا کنید

۲۴- مجموع سه عدد متوالی را حساب کنید در صورتیکه عدد وسط مساوی a باشد، $\frac{1}{2}$ این مجموع را بدست آورید (حالتهای مخصوص: $a=12$ ، $a=-5$ و $a=-1$ ، $a=120$ و $a=0$).

۲۵- مزد روزانه پدری a ریال و مزد روزانهٔ پسرش b ریال کمتر است مخارج آنها در روز $\frac{2}{3}$ درآمد روزانهٔ آنهاست معلوم کنید مبلغ پس‌انداز آنها را پس از d روز (حالت مخصوص $a=250$ و $b=2$).

۲۶- درازای ضلع های مثلثی a ، b و c و درازای محیط آن $2p$ است هر یک از عبارتهای $b+c-a$ و $a+b-c$ و $a+c-b$ را برحسب p و یکی از اضلاع حساب کنید.

۲۷- شخصی مقداری پارچه خریده a ریال در فروش آن صدی پانزده خرید نفع برد مبلغ نفع و مبلغ فروش او را حساب کنید (حالت مخصوص $a=2450$).

فصل چهارم

اتحادهای مهم

۱۱۲ - چنانکه پیش گفتیم اتحاد تساوی بین دو عبارت جبری است بقسمی که چون در هر عبارت عمل های لازم را انجام دهیم دو طرف عین یکدیگر شوند. بنابراین باید دو طرف یک اتحاد بازاء هر مقدار عددی که بجای حرفها گذاشته میشود با یکدیگر مساوی شود.

چون در اعمال جبری دانستن بعضی از اتحادها لازم است بنابراین باید دانش آموزان همواره این اتحادها را که اکنون میگوئیم بخاطر داشته باشند:

۱۱۳ - اتحاد ۱ - توان دوم یک دو جمله - چون دو جمله $a+b$ و همچنین $a-b$ را بتوان ۲ رسانیم حاصل میشود:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

بنابراین این دو اتحاد بدست میآید:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

یعنی: توان دوم یک دو جمله مساویست با مجموع توانهای دوم

دو جمله آن بعلاوه دو برابر حاصل ضربشان (هر جمله را با نشانه‌اش باید در نظر گرفت).

نتیجه - از تفریق دو اتحاد بالا این اتحاد بدست می‌آید:

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

یعنی: توان دوم مجموع دو جمله منهای توان دوم تفاضل همان دو جمله مساویست با چهار برابر حاصل ضرب آن دو جمله.

بنابر اتحادهای بالا

$$(a+1)^2=a^2+2a+1$$

$$(x-3)^2=x^2-6x+9$$

$$(2a+b)^2=4a^2+4ab+b^2$$

$$(2x-3y)^2=4x^2-12xy+9y^2$$

$$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2=2-2\sqrt{6}+3=5-2\sqrt{6}$$

$$(a+1)^2-(a-1)^2=4a$$

$$(\sqrt{5}+1)^2-(\sqrt{5}-1)^2=4\sqrt{5}$$

$$(2x+y)^2-(2x-y)^2=8xy$$

تبصره ۱- میدانیم که دو عدد قرینه دارای یک توان دومند پس:

$(a-b)^2=(b-a)^2$ و $(a+b)^2=(-a-b$

پرسش‌های شفاهی

حاصل این عبارتها را بدست آورید

$(7x-a)^2$ و $(10-y)^2$ و $(x+1)^2$

$(a+2x)^2$ و $(2x-1)^2$ و $(x-2a)^2$

$(\sqrt{5}-2)^2$ و $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ و $(3x-y)^2$

$(2\sqrt{2}-1)^2$ و $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$ و $(2x-5y)^2$

$(y+\sqrt{5})^2-(y-\sqrt{5})^2$ و $(2x+1)^2-(2x-1)^2$

$(x\sqrt{2}+y\sqrt{3})^2-(x\sqrt{2}-y\sqrt{3})^2$ و $(2\sqrt{2}+1)^2-(2\sqrt{2}-1)^2$

تبصره ۲- از روی اتحادهای (۱) میتوان بعضی از عددها را در ذهن بتوان دوم رسانید

مانند $(21)^2=(20+1)^2=400+40+1=441$

پرسش‌های شفاهی

عددهای زیر را بتوان دوم برسانید

۴۱   ۱۹   ۷۱   ۳۱

۷۸   ۱۹۹   ۱۰۱   ۲۹

تبصره ۳- هرگاه بخواهیم یک سه جمله‌ای را بتوان دوم برسانیم چون دو جمله آنرا یک جمله فرض کنیم میتوانیم از روی اتحاد (۱) آنرا بتوان دوم برسانیم.

چنانکه توان دوم سه جمله $a + b - c$ را میتوان چنین نوشت

$$(a + b - c)^2 = [(a + b) - c]^2$$

$$= (a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2$$

و چون $(a + b)$ را بتوان دوم برسانیم و حاصل $-2(a + b)c$ را بدست آوریم توان دوم سه جمله $a + b - c$ چنین میشود

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

وهمچنین برای اینکه یک چهار جمله را بتوان دوم برسانیم کافی است که هر دو جمله آنرا یکجمله فرض کنیم

مثال - $(a - b + c - d)^2 = [(a - b) + (c - d)]^2 =$

$$(a - b)^2 + 2(a - b)(c - d) + (c - d)^2$$

پس از انجام عمل های لازم حاصل چنین میشود

$$(a - b + c - d)^2 =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd$$

ازین مثالها و مثالهای دیگر این قاعده برای بدست آوردن توان دوم یک چند جمله نتیجه میشود:

توان دوم یکچند جمله مساویست با مجموع توانهای دوم جمله های آن بعلاوهٔ دو برابر حاصل ضرب هر جمله در جمله های دیگر، هر جمله را با نشانش

در نظر بگیرید)

تمرین

۱- چند جمله ای های زیر را بتوان دوم برسانید :

$(2b+2-\sqrt{2})$ $(a-2b-c)$ $(x-y+1)$

$(-a-2b-\sqrt{5})$ $(2x-3y+2z)$

$(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})$ $(\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)$

$(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}-5\sqrt{5})$ $(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5})$

$(2x-3y-2a-3b)$ $(x-y-a+1)$

۲- درستی تساویهای زیر را تحقیق کنید :

$\sqrt{2}+3\sqrt{5}=\sqrt{47+6\sqrt{10}}$ $\sqrt{7+2\sqrt{6}}=\sqrt{6}+1$

$5-2\sqrt{7}=-\sqrt{53-20\sqrt{7}}$ $2\sqrt{7}-\sqrt{6}=\sqrt{34-4\sqrt{42}}$

$\sqrt{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$ $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

۳- مستطیلی است به درازای a و پهنای b بر این مستطیل و مربع بضلع a و b اضافه کنید و از سطح حاصل مربعی بضلع $a-b$ بردارید ثابت کنید که مساحت باقیمانده سه برابر مساحت مستطیل مفروض است

۱۱۴- اتحاد ۲- حاصل ضرب مجموع دو جمله در تفاضل آنها- چون دو جمله $a+b$ دا در دو جمله $a-b$ (دو عبارت $a+b$ و $a-b$ را مزدوج یکدیگر

گوئید، ضرب کنیم این اتحاد بدست میآید :

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

یعنی: حاصل ضرب مجموع دو جمله در تفاضل آنها مساویست با توان دوم جملهٔ اول (کاهش‌یاب) منهای توان دوم جملهٔ دوم (کاسته).

مثال-

$$(a+2)(a-2)=a^2-4$$

$$(x-2y)(x+2y)=x^2-4y^2$$

$$(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})=a+b-(a-b)$$

$$=a+b-a+b=2b$$

$$\sqrt[3]{8+3\sqrt{7}}\cdot\sqrt[3]{8-3\sqrt{7}}=\sqrt[3]{(8+3\sqrt{7})(8-3\sqrt{7})}$$

$$=\sqrt[3]{64-63}=\sqrt[3]{1}=1$$

پرسش‌های شفاهی

عبارت زیر را در مزدوج خود ضرب کنید

$4a-b$ $1+3x$ x^2+3

a^2-5 $4xy-2$ $7x-y$

$ax-by$ $xy-y^2$ a^2+2x^2

$3-2\sqrt{7}$ $2\sqrt{3}-5$ $\sqrt{5}-\sqrt{2}$

تمرین

حاصل عبارتهای زیر را معلوم کنید:

$$\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}} \qquad \sqrt[3]{2\sqrt{13}-5}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{13}+5}$$

$$(\sqrt{x^2+9}+2)(2-\sqrt{x^2+9})$$

$$\sqrt{\sqrt{y}+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$(a\sqrt{b}-b\sqrt{a})(b\sqrt{a}+a\sqrt{b})$$

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a}+\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}-\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2$$

۱۱۵-۱ اتحاد ۳- حاصل ضرب دو دو جمله که در یک جمله مشترکند-

چون دو جمله‌ای $x+a$ را در دو جمله‌ای $x+b$ ضرب کنیم چنین میشود:

$$\begin{array}{l} x+a \\ x+b \\ \hline x^2+ax \\ \quad +bx+ab \\ \hline x^2+(a+b)x+ab \end{array}$$

بنابراین اتحاد زیر بدست میآید:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

یعنی: حاصل ضرب دو دو جمله که در یک جمله مشترکند مساوی است با توان دوم جملهٔ مشترک بعلاوهٔ حاصل ضرب مجموع دو جملهٔ غیر مشترک در جملهٔ مشترک بعلاوهٔ حاصل ضرب دو جملهٔ غیر مشترک (باید هر جمله را با نشانهٔ خود در نظر گرفت).

مثال

$$(x+2)(x+3)=x^2+(2+3)x+6=x^2+5x+6$$

$$(x-5)(x-3)=x^2+(-5-3)x+15=x^2-8x+15$$

$$(x+4)(x-7)=x^2+(4-7)x-28=x^2-3x-28$$

$$(2\sqrt{b}-a)(\sqrt{b}-a)=a^2-3a\sqrt{b}+2b$$

پرسش‌های شفاهی

حاصل عبارتهای زیر را تعیین کنید

$(x+5)(x+7)$ $(a+1)(a+2)$

$(a-3)(a-8)$ $(y-2)(y-5)$

$(y-2)(y+2)$ $(x-8)(x+5)$

$(x-2\sqrt{3})(x+3\sqrt{3})$ $(y-3)(y+7)$

$(a^2-6a+8):(a-4)$ $(x^2+3x+2):(x+2)$

$(x^2-x-20):(x-5)$ $(a^2-a-6):(a-3)$

۶۱- توان سوم دو جمله - توان سوم یک دو جمله‌ای مساوی است با مجموع توانهای سوم هر جمله بعلاوه سه برابر توان دوم هر جمله در جمله دیگر (هر جمله با قید نشانهٔ خود)

یعنی: $(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$

تمرین

۱- حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$(a+b)^3 - (a-b)^3 - 2b^3$$

$$(2x-5)^3 + (x-2)(x+2) - 2x(3x-5)^2$$

$$(a+b)(b+c) - (c+d)(d+a) + (a+c)(c+a)$$

۲- ثابت کنید که تساویهای زیر اتحادند:

$$(\sqrt{7} - \sqrt{4})(\sqrt{7} + \sqrt{4}) - (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 0$$

$$(7 - 3\sqrt{5})(7 + 3\sqrt{5}) - (\sqrt{3} - 1)^2 = 2\sqrt{3}$$

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$$

$$(a+\sqrt{x})^3 + (a-\sqrt{x})^3 = 2a^3 - 6ax$$

فصل پنجم

تجزیه عبارتها بحاصل ضرب سازه‌ها

١١٢ - تعریف - هر عبارت جبری که جز بر خود و یک (بدون قید نشانه) بر عبارت دیگری بخش پذیر نباشد آنرا اول گوئیم (مانند اعداد اول در حساب)

چند جمله‌های $2x+1$ و $3a-b$ و x^2+1 هر یک عبارتی اول هستند

بنابراین هرگاه عبارتی غیر اول باشد یعنی بر عبارت دیگری بخش پذیر باشد تبدیل بحاصل ضرب دو سازه میشود (نمرهٔ ١١٠ تبصره)

ممکن است که هر یک ازین دو سازه نیز تبدیل بحاصل ضرب دو سازهٔ دیگر شود چون این عمل را ادامه دهیم بالاخره عبارت مفروض بحاصل ضرب چندین سازهٔ اول تجزیه میگردد

این عمل را **تجزیه بحاصل ضرب سازه‌ها** گویند

چنانکه عبارتهای ab و x^2 و $12cx^2$ و $4x-4$ و ax^2+a عبارتهای غیر اولند که اولی بر دو سازهٔ a و b و دومی بر x و سومی بر سازه‌های ۳ و ۴ و c و x وچهارمی بر سازه‌های ۴ و $x-1$ و پنجمی بر سازه‌های a و x^2+1 بخش پذیر و پس از تجزیه هر یک بسازه‌های اول میتوان چنین نوشت:

$ab = a \cdot b$

$x^2 = x \cdot x$

$12\,c^2x = 3 \cdot 4 \cdot c \cdot c \cdot x$

$4x - 4 = 4 \times (x - 1)$

$ax^2 + a = a \cdot (x^2 + 1)$

تجزیه سازه های اول یکی از قسمت های مهم جبر و مقابله است که در ساده کردن برخها و عملهای جبری و حل مسئله ها بکار میرود و در اینجا بعضی از قاعده های ساده آن را میگوئیم:

۱۱۸ - الف - تجزیه چند جمله وقتی که جمله های آن دارای سازه مشترکی باشند -

در چند جمله $ab + ac - ad$ جمله های آن دارای سازه مشترک a میباشند بنابراین چند جمله بر سازه a بخش پذیر است پس:

$$ab + ac - ad = a(b + c - d)$$

یعنی چند جمله بالا بحاصل ضرب دو سازه a و $(b + c - d)$ تجزیه شده است که چون این دو سازه درهم ضرب شوند چند جمله مفروض بدست میآید.

قاعده - نخست سازه مشترک جمله های چند جمله را تعیین میکنیم پس از آن چند جمله مفروض را بر این سازه مشترک تقسیم نموده بهر این تقسیم را بدست میآوریم و عبارت مفروض مساوی حاصل ضرب آن سازه

مشترک درین بهر خواهد بود.

مثال ۱- جمله های چند جمله $۷a^3x - ۱۵a^2$ بر a^2 بخش پذیر یعنی a^2 سازه مشترک بین جمله های آن میباشد و چون آنرا بر a^2 تقسیم کنیم بهر مساوی $۷ax - ۱۵$ میشود بنابراین $۷a^3x - ۱۵a^2 = a^2(۷ax - ۱۵)$

مثال ۲- عبارت $\sqrt{۳}(a-b) - \sqrt{۲}(a-b)$ بر $a-b$ بخش پذیراست و بهر $\sqrt{۳} - \sqrt{۲}$ میباشد پس:

$$\sqrt{۳}(a-b) - \sqrt{۲}(a-b) = (a-b)(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})$$

مثال ۳- عبارت $۳ \times ۵ \times ۱۷ - ۳ \times ۵ \times ۱۴$ را حساب کنید.

از روی تجزیه چنین خواهیم داشت

$$۳ \times ۵ \times ۱۷ - ۳ \times ۵ \times ۱۴ = ۳ \times ۵ (۱۷ - ۱۴) = ۳ \times ۵ \times ۳ = ۴۵$$

پرسش های شفاهی

عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید:

$(۱۵)^۲$	$(۲۴)^۲$	$(۲۱)^۲$
$۲x - ۲$	$-۳۶ a^۲b y^۳$	$۱۲ abc^۲$
$ax + cx$	$۵x^۲ + ۱۰x$	$ax + a$
$ax + acx$	$۳ax - ۶a$	$ac - c^۲$
$۲ae - abc$	$۱۲ ax - ۱۰ bx$	$۵ ax^۲ - x^۲$

$۲ax - ۴ab \qquad ۳ax + ۶bx \qquad -۲ax^{۲} + a^{۲}x$

$ab + ax + ay \qquad acx - ۳ac - c^{۲} \qquad ۲ay - ۴y^{۲} + ۶ay$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه‌ها تبدیل کنید

$ax - a^{۲}x^{۲} - a^{۳}x \qquad ۳ax - ۱۵a^{۲}$

$ay - abc - aby \qquad ۳c^{۲} - ۱۲c - ۱۸c^{۴}$

$۲c^{۲} - ۱۵c + ۵c^{۳} \qquad a^{۲} - ۲ax + a$

$۸a^{۲} - ۴a^{۶} + ۱۲a^{۳} - ۶a^{۵} \qquad a^{۴} - a^{۳} + a^{۲} + a$

$۱۲ax^{۲} - ۲x\sqrt{۳} + bx^{۲}\sqrt{۶} \qquad ۸ax - ۶bx + ۱۲x\sqrt{۵}$

۲- یکمجهولی‌های زیر را حل کنید:

$my = am + bm - cm \qquad ax = am - ac$

$۴ax = ۲ab - ۸ac + ۴a^{۲} \qquad ۲ax = ۶ab - ۱۲a^{۲}$

۳- عبارتهای زیر را حساب کنید:

$۳ \times ۱۵ \times ۱۲ \times ۱۷ - ۳ \times ۱۵ \times ۱۲^{۲}$

$\frac{۲۲}{۷}(۲۱)^{۲} + \frac{۲۲}{۷}(۱۴)^{۲} - \frac{۲۲}{۷}(۲۱ \cdot ۱۴)$

$۵۷۴۲ \times (۱۳)^{۲} + ۵۷۴۲ \times ۶۵ + \frac{۴ \times ۵۷۴۲ \times ۱۳ \times ۱۲}{۲}$

۱۱۹- ب - تجزیه چند جمله بوسیله دسته بندی - دسته بندی یعنی دسته…

گردن جمله های یک چند جمله ئی قسمی که جمله های هر دسته دارای سازه ٔ مشترکی باشند:
مانند چند جمله ٔ $ay + bx + by + ax$ که آنرا میتوان بدو دسته $ax + bx$ و
$ay + by$ تبدیل نمود دسته اول دارای سازه ٔ مشترک x و دسته دوم دارای سازه
مشترک y میباشند بنابراین خواهیم داشت

$$ax + by + bx + ay = x(a+b) + y(a+b)$$

وحالا دیده میشود که طرف دوم این شادی بر $a + b$ بخش پذیر است پس

$$ax + by + bx + ay = (a+b)(x+y)$$

بطور کلی هر عبارتی که مانند عبارت بالایعنی بصورت $ax + by + bx + ay$ باشد
بوسیله ٔ دسته بندی تجزیه پذیر میباشد.

مثال ۱- چند جمله ٔ $۲bx^۲ - ۳abx + ۲cx - ۳ac$ را بحاصل ضرب سازه ها
تجزیه کنید

چون چند جمله ٔ مفروض را بدو دسته ٔ $۲bx^۲ - ۳abx$ و $۲cx - ۳ac$
تبدیل کنیم و هر یک از این دو دسته را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه نمائیم چنین خواهیم داشت

$$۲bx^۲ - ۳abx + ۲cx - ۳ac = bx(۲x - ۳a) + c(۲x - ۳a)$$

طرف دوم این شادی بر $۲x - ۳a$ بخش پذیر است پس:

$$۲bx^۲ - ۳abx + ۲cx - ۳ac = (۲x - ۳a)(bx + c)$$

مثال ۲- مطلوبست تبدیل عبارت $۶ + \sqrt{۶} + ۳\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۳}$ بحاصل ضر

سازه ها

در دو جمله اول و سوم عدد ۳ و در دو جمله دیگر $\sqrt{۳}$ سازه مشترک است بنابراین میتوان چنین نوشت:

$$۶+\sqrt{۶}+۳\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳}=۳(۲+\sqrt{۲})+\sqrt{۳}(\sqrt{۲}+۲)$$

$$=(۲+\sqrt{۲})(۳+\sqrt{۳})$$

مثال ۳ - میخواهیم عبارت

$$۱+xy+a(x+y)-(x+y)-a(۱+xy)$$

را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنیم

$xy+۱$ را یکجمله فرض می کنیم بنابراین با جمله آخر دارای سازه مشترک $۱+xy$ میباشد و دو جمله دیگر عبارت مفروض دارای سازه مشترک $x+y$ است پس عبارت بالا مساوی

$$(۱+xy)(۱-a)+(x+y)(a-۱)$$

و یا مساوی $(۱+xy)(۱-a)-(x+y)(۱-a)$ میشود.

سازه مشترک این عبارت $a-۱$ است بنابراین عبارت مفروض بدین صورت درمیآید

$$(۱-a)(۱+xy-x-y)$$

پرانتز دوم نیز تجزیه پذیر است زیرا اگر آن را بدو دسته $xy-x$ و $۱-y$ تبدیل کنیم و در دسته اول x و در دسته دوم ۱- را سازه مشترک قرار دهیم داخل پرانتز

مساوی

$x(y-1)-(y-1)$ ویا $(y-1)(x-1)$ میشود

پس عبارت بالا بصورت حاصل ضرب

$(1-a)(y-1)(x-1)$ ویا $(1-a)(1-y)(1-x)$ درمیآید

مثال ۴ - مطلوبست حل تچندی

$$abx+x=abc+c-2ab-2$$

دو طرف را بحاصل ضرب سازوار تجزیه میکنیم پس خواهیم داشت:

$$x(ab+1)=c(ab+1)-2(ab+1)$$

ویا

$$x(ab+1)=(ab+1)(c-2)$$

واگر $ab+1\neq 0$ باشد ریشهٔ تچندی چنین است:

$$x=c-2$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازوار تجزیه کنید:

x^3+x^2+x+1 — $ax+2x+ay+2y$

$ay(a-b)+ax(b-a)$ — $a(c-y)-b(y-c)$

$ax+3a-bx-3b$ — $3ax-6bx-ay+2by$

$a^3-2ax-a^2x+2x^2$ — $x^2-ay+axy-x$

$a^2c - acx + acx^2 - a^2cx$

$12ax^5 - 6ax^3 - 4x^5 + 2x^3$

$10 + \sqrt{24} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$

$4\sqrt{18} - 6\sqrt{15} - 2\sqrt{30} + 15$

۲- ab و ac مساحتهای دو مستطیلند که پهلوهای آن (a و b) و (a و c) میباشند راست گوشه ای (مربع مستطیلی) پیدا کنید که مساحتش برابر مجموع مساحتهای آنها باشد (و نیز از روی شکل برابر بودن آنها را ثابت کنید)

۳- در مسئله پیش راست گوشه ای پیدا کنید که مساحتش برابر تفاضل مساحتهای آنها باشد (و نیز از روی شکل برابر بودن آنها را ثابت کنید)

۴- a و b و c و d نمایش چهار درازا میباشند ثابت کنید که مجموع چهار مستطیل ab و ac و bc و bd را میتوان بیک راست گوشه تبدیل کرد که از حیث مساحت با مجموع آنها برابر باشد (از روی شکل نیز همین مطلب را به ثبوت رسانید)

۵- در عبارت $ac - bc + ad - bd$ ، a و b و c و d نمایش چهار درازا میباشند - اول معنای هندسی عبارت بالا را بگوئید دوم آن عبارت را بسازه های اول تجزیه نموده و تعبیر هندسی تساوی حاصل را بیان کنید.

۱۲۰- ج - تجزیه سه جمله هائیکه بصورت $a^2 \pm 2ab + b^2$ میباشند - از اتحاد (۱) معلوم میشود:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

یعنی: هر سه جمله ای که مرکب از مجموع توانهای دوم دو سازه بعلاوهٔ (یا منهای) دو برابر حاصل ضربشان باشد بتوان دوم مجموع (یا تفاضل) آن دو تبدیل میگردد.

مثال - در سه جملهٔ $25a^4 + 60a^2b + 36b^2$ دو جملهٔ اول و آخر سه جمله‌ای توان دوم دو سازهٔ $5a^2$ و $6b$ میباشد و جملهٔ $60a^2b$ برابر است با $2 \times 5a^2 \times 6b$ بنابراین این سه جمله را میتوان چنین نوشت

$$25a^4 + 60a^2b + 36b^2 = (5a^2 + 6b)^2$$

همچنین سه جملهٔ $4x^4 + 9a^6 - 12a^3x^2$ تشکیل شده است از مجموع توانهای دوم $2x^2$ و $3a^3$ و جملهٔ $-12a^3x^2$ که مساویست با $-2 \times 2x^2 \times 3a^3$ پس

$$4x^4 + 9a^6 - 12a^3x^2 = (2x^2 - 3a^3)^2 = (3a^3 - 2x^2)^2$$

پرسش های شفاهی

۱ - بر هر یک از عبارتهای زیر جمله ای بیفزائید تا عبارت حاصل بصورت توان دوم یک دو جمله ای در آید:

$12x + 36$ $1 + 16c^2$ $a^2 + 1$

$16a^2 - 16ax$ $-16x + 64$ $y^2 - 18y$

$16x^2 - 32ax$ $16x^2 + 4y^2$ $-24ac + 9c^2$

$8x^2 - 12cx$ $\qquad$ $9x^2 - 6x$ $\qquad$ $25a^2 + 10a$

۲- سه جمله ای های زیر را به توان دوم یک دو جمله تجزیه کنید

$9x^2 - 12x + 4$ $\qquad$ $x^2 - 4x + 4$

$a^2 - 14a + 49$ $\qquad$ $4y^2 - 4y + 1$

$81 - 18t^3 + t^6$ $\qquad$ $c^2 + 4 - 4c$

$x^2 + x + \frac{1}{4}$ $\qquad$ $c^8 + 2c^4 + 1$

$9a^2 - 2a + \frac{1}{9}$ $\qquad$ $4x^2 + x + \frac{1}{16}$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را به حاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید

$25x^2 - 20xy + 4y^2$ $\qquad$ $16t^2 - 8at + a^2$

$4a^2 - 28at + 49t^2$ $\qquad$ $9a^2 - 30at + 25t^2$

$144t^2 - 120at + 25a^2$ $\qquad$ $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

$x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2$ $\qquad$ $169x^2 + 78ax + 9a^2$

$121x^2 - 110cx + 25c^2$ $\qquad$ $4a^2t^8 - 4at^4 + 1$

$y^2 + y + \frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{25}{16}x^2 + \frac{5}{4}x + 1$

$169a^2 - 156az + 36z^2$ $\qquad$ $121t^2z^2 - 220txz + 100t^2$

۲- چند جمله ای های زیر را حل کنید:

$$ax - cx = a^2 - 2ac + c^2$$

$$ax - 2tx = a^2 - 4at + 4t^2$$

$$bx - 4x = b^2 - 8b + 16$$

$$ay - c^2 = a^2 - 2ac - cy$$

تبصره - در تجزیه یک عبارت جبری بهتر آنست که نخست سازه مشترک تمام جمله ها را اگر موجود باشد تعیین نموده پس از آن بتجزیه پرداخت

مثال ۱- عبارت $a^2x^2 - 2a^2x + a^2$ را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید.

چند جمله $a^2x^2 - 2a^2x + a^2$ بر a^2 بخش پذیر است بنابراین

$$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 = a^2(x^2 - 2x + 1)$$

سه جمله درون پرانتز توان دوم $x - 1$ است پس

$$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 = a^2(x - 1)^2$$

مثال ۲- میخواهیم عبارت $3ct - 3cx + 3at - 3ax$

بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنیم.

عبارت بالا را میتوان بترتیب چنین نوشت

$$3ct - 3cx + 3at - 3ax = 3(ct - cx + at - ax)$$

$$= 3[c(t - x) + a(t - x)]$$

$$= 3(t - x)(c + a)$$

تمرین

عبارت های زیر را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید:

$2c^3 - 20c^2 + 50c$ $\qquad$ $t^5 - 4t^4 + 4t^3$

$at^2 - 70at + 1245a$ $\qquad$ $16a^3 - 40a^2t + 25at^2$

$32at^8 - 48at^6 + 18at^4$

$2at + 2ay + 32t + 32y$

$2a^5 - 2a^4 + 2a^3 - 2a^2$ $\qquad$ $x^4 + x^3 + x^2 + x$

$30at - 15a + 17c - 24ct$

$6atx + 6btx - 10aty - 10bty$

$\pi h(R-z)^2 - \pi h(R+z)^2 + \pi hR^2$

١٢١ - ٤ - تجزیه عبارتیکه بصورت $a^2 - b^2$ باشد. از اتحاد شماره ۲ چنین برمیآید:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

یعنی: تفاضل توانهای دوم دو عبارت بحاصل ضرب مجموع آن دو در تفاضلشان تجزیه میگردد.

مثال ۱- عبارت $16x^8 - 81a^{12}$ را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید:

چون این عبارت بصورت $a^2 - b^2$ است خواهیم داشت :

$$16x^8 - 81a^{12} = (4x^4 + 9a^6)(4x^4 - 9a^6)$$

پرانتز دوم نیز تجزیه میشود بنابراین :

$$16x^8 - 81a^{12} = (4x^4 + 9a^6)(2x^2 + 3a^3)(2x^2 - 3a^3)$$

مثال ۲ـ مطلوبست محاسبهٔ $59^2 - 57^2$

از روی تجزیه حاصل آن باسانی بدست میآید از اینقرار :

$$59^2 - 57^2 = (59 + 57)(59 - 57) = 116 \times 2 = 232$$

پرسش‌های شفاهی

عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنید :

$a^2 - 9$ $\qquad$ $4x^2 - 1$ $\qquad$ $4t^2 - 9$

$25y^2 - 36z^2$ $\qquad$ $100x^4 - 81y$ $\qquad$ $81t^2 - 121k^6$

$\frac{1}{25} - 0{,}04x$ $\qquad$ $z^2 - \frac{25}{64}$ $\qquad$ $\frac{4}{9}x^2 - 121$

$17^2 - 15^2$ $\qquad$ $25^2 - 5^2$ $\qquad$ $36^2 - 34^2$

مثال ۱ـ مطلوبست تبدیل عبارت $(a+b)^2 - (a-b)^2$

بحاصل ضرب سازه‌ها.

عبارت مفروض را میتوان چنین نوشت :

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = [(a+b) + (a-b)]\,[(a+b) - (a-b)]$$

$$=(a+b+a-b)(a+b-a+b)$$

$$=2a\cdot 2b=4ab$$

دیده میشود که این تجزیه بهمان نتیجهٔ اتحاد شمارهٔ ۱۱۲ است.

مثال ۲- عبارت $(3x-1)^2-(1-2y)^2$ را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنیم میتوان چنین نوشت

$$(3x-1)^2-(1-2y)^2=[(3x-1)+(1-2y)][(3x-1)-(1-2y)]$$

$$=(3x-2y)(3x+2y-2)$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنید:

$16a^2-9(a+b)^2$ — $25a^4-16b^4$

$64x^2-(8x+2y)^2$ — $16x^2-9(a-2x)^2$

$(2a-t)^2-(2a+t)^2$ — $(a-2x)^2-(3x+t)^2$

$12(x-2y)^2-48(2x-y)^2$ و $(2a-3b)^2-(3a-2b)^2$

۲- عبارتهای زیر را حساب کنید:

137^2-37^2 — 56^2-51^2 — 73^2-43^2

215^2-185^2 — 154^2-146^2 — 114^2-64^2

۳- بازاء $\pi=\frac{22}{7}$ ، $R=11$ و $r=7$ عبارتهای زیر را حساب کنید:

$\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$ ، $\pi R^2 - \pi r^2$

مثال ۱- عبارت $a^2 - 2ab + b^2 - x^2$ را بحاصل ضرب سازه‌ها [تجزیه کنید]

سه جمله اول توان دوم $a - b$ است بنابراین میتوان چنین نوشت

$$a^2 - 2ab + b^2 - x^2 = (a - b)^2 - x^2$$

$$= (a - b + x)(a - b - x)$$

مثال ۲- عبارت $t^3 - t^2 - 4t + 4$ را بحاصل ضرب [تجزیه] کنید:

میتوان بترتیب چنین نوشت

$$t^3 - t^2 - 4t + 4 = t^2(t - 1) - 4(t - 1)$$

$$= (t - 1)(t^2 - 4)$$

$$= (t - 1)(t + 2)(t - 2)$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه‌ها تجزیه کنید:

$y^2 - t^2 + x^2 - 2xy$ $4x^2 - 4x + 1 - m^2$

$1 - 4at - t^2 + 4a^2t^2$ $6xy - t^2 + y^2 + 9x^2$

$m^2 - a^2 - 2at - t^2$ $6at - a^2 - 9t^2 + m^2$

$x^2 - 4xt + 4t^2 - 9a^2 + 6a - 1$

$1 + 2bc + 2a - c^2 - b^2 + a^2$

$a^3 - a + a^2x - x$ $\qquad$ $2a^3x + 3a^2x - 8ax - 12x$

$t^4 - 10t^2 + 9$ $\qquad$ $t^3 + 2t^5 + t^7$

$2x^4 - 40x^2 + 200 - 2m^2$

$5a^4 + 20a^3 + 5a^5 - 20a^7$

۲- معادله‌های زیر را حل کنید (با اینکه x مجهول باشد) :

$ax + bx = a^2 - b^2$ $\qquad$ $t^5x - t^3 = tx - t$

$x(t-3)(t^2+9) = t^4 - 81$ $\qquad$ $a^3x = a^2 - 2a + 1 + ax$

۱۲۲- ۵- تجزیه سه جمله درجه دوم $x^2 + px + q$

از اتحاد (۲) چنین بر میاید که :

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

یعنی : سه جمله $x^2 + px + q$ وقتی تجزیه پذیر بسازه های درجه اول است که p حاصل جمع دو مقدار و q حاصل ضرب همان دو باشد.

مثال ۱- سه جمله $x^2 + 3x + 2$ را تجزیه کنید.

عدد ۲ را باید تبدیل بحاصل ضرب دو مقدار نمود بطوریکه مجموعشان ۳ باشد چون حاصل جمع و حاصل ضرب هر دو مثبت هستند بنابراین دو عدد مطلوب مثبت بوده

ومساوی ۱ و ۲ میباشند پس:

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

مثال ۲- سه جمله $a^2 - 11a + 24$ را تجزیه کنید.

حاصل ضرب دو عدد مطلوب که ۲۴ باشد مثبت است ومجموعشان یعنی ۱۱- منفی است بنابراین این دو عدد منفی میباشند برای تعیین آنها عدد ۲۴ را باید بدو سازه تجزیه نمود بطوریکه مجموعشان ۱۱ شود وچون ۲۴ تشکیل شده است از حاصل ضرب

	1×24	که در اینجا مجموعشان	۲۵ است
یا	2×12	«	۱۴ است
یا	3×8	«	۱۱ است
یا	4×6	«	۱۰ است

بنابراین می بینیم که دو عدد مطلوب ۳- و ۸- میباشد

پس $a^2 - 11a + 24 = (a-8)(a-3)$

مثال ۳- مطلوبست تجزیه سه جمله $c^2 - c - 42$ بدو سازه درجه اول

چون حاصل ضرب دو عدد مطلوب (یعنی ۴۲-) منفی است پس نشانه آنها مختلف میباشد وچون حاصل جمعشان (یعنی ۱-) منفی است پس آنکه قدر مطلقش بزرگتر است منفی میباشد بنابراین باید ۴۲ را بدو سازه تجزیه کنیم بقسمی که تفاضلشان ۱ باشد وبعد سازه بزرگترا منفی بگیریم:

۴۲ تشکیل شده است از:

	۴۲ × ۱	که در اینجا تفاضلشان	۴۱ است
یا	۲۱ × ۲	«	۱۹ است
یا	۱۴ × ۳	«	۱۱ است
یا	۷ × ۶	«	۱ است

پس دو عدد مطلوب ۷- و ۶ میباشند و از آنجا خواهیم داشت:

$$c^2 - c - 42 = (c-7)(c+6)$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید:

$a^2 - 9a + 14$ | $x^2 + 4x + 3$

$x^2 - 8x + 7$ | $t^2 + 3t - 10$

$y^2 - 4y - 45$ | $t^2 - t - 6$

$-2y - y^2 + 63$ | $-x^2 - x + 12$

$a^2b^2 + 10abx^3 - 24x^6$

$(a+x)^2 + 3(a+x) + 2$ | $33a^2 - b^2x^2 - 8abx$

در این عبارت مجموع $(a+x)$ را در نظر بگیرید

۲- تمرین های ترکیبی - عبارتهای زیر را بحاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید:

$x^3 - 4x$ $\qquad$ $56t + t^2 - t^3$

$3y^2 - 9y - 3$ $\qquad$ $ab^4 - 7ab^2 - 18a$

$81a - 18a^3 + a^5$ $\qquad$ $4a^5 - 92a^3 - 200a$

$6at^2 + 3t^2c + 18atz + 9ctz$

$2a^3 - 2ay^2 - 8ayz - 8az^2$

۳- چندجمله‌ایهای زیر را بنابر آنکه x و y و z مجهول باشند حل کنید.

$(a-3)x = a^2 - 5a + 6$ $\qquad$ $4x + ax = a^2 - 16$

$Ky + 42 = K^2 - K - 6y$

$ay + a = a^2 + 5y - 2$

$ax + 3ac = a^2 + 3cx + 2c^2$

۴- با در نظر گرفتن تساویهائی مانند تساوی

$$(\sqrt{5} \pm \sqrt{3})^2 = 8 \pm 2\sqrt{15}$$

و دانستن $8 = 5 + 3$ و $15 = 5 \times 3$ عبارتهای زیر را بحاصل ضرب ساده‌ای تجزیه کنید

$5 - 2\sqrt{6}$ $\qquad$ $5 + 2\sqrt{6}$ $\qquad$ $7 + 2\sqrt{10}$

$6 + 2\sqrt{8}$ $\qquad$ $8 - 2\sqrt{7}$ $\qquad$ $4 + 2\sqrt{3}$

$21 - 12\sqrt{3}$ $\qquad$ $16 - 2\sqrt{55}$ $\qquad$ $6 - 4\sqrt{2}$

۱۲۳- حل بعضی از چندجمله‌ایها از روی تجزیه.

مثال ۱- مطلوبست حل همچندی $(x-3)(x+2)=0$. برای حل این همچندی باید درنظر داشت که

شرط لازم و کافی برای اینکه حاصل ضرب چند سازه مساوی صفر باشد آنستکه دست کم یکی از سازه ها صفر باشد (شمارهٔ ۴۲)

ازینجا چنین برمیآید که یا باید $x-3=0$ باشد و یا $x+2=0$ یعنی یا $x=3$ و یا $x=-2$ دو عدد ۳ و ۲- ریشه های همچندی مفروضند.

مثال ۲- مطلوبست حل همچندی

$$(x-1)(2x-3)=(x-1)(2x+5)$$

اگر دو طرف همچندی را بر $x-1$ تقسیم کنیم حاصل میشود

$$2x-3=2x+5$$

و یا $-3=5$ یعنی ریشه ای برای همچندی مفروض بدست نمی آید درصورتیکه می بینیم اگر x را مساوی یک بگیریم دو طرف همچندی باهم یکی میشوند یعنی ۱ ریشهٔ همچندی است برای بدست آوردن این ریشه طرف دوم را بطرف اول برده و عبارت حاصل را تجزیه میکنیم چنین خواهیم داشت:

$$(x-1)\left[2x-3-(2x-5)\right]=0$$

و یا $(x-1)(-8)=0$ بنابر اصل بالا چون سازهٔ ۸- مخالف صفر است پس باید $x-1=0$ باشد و ازآنجا ریشهٔ همچندی بالا $x=1$ میباشد.

۱۲۴ - تبصرهٔ مهم - نباید دو طرف همچندی را بر عبارتی شامل مجهول تقسیم کرد زیرا ممکن است یک یا چند ریشهٔ همچندی از بین برود دیگر آنکه آن عبارت شامل هیچ ریشه نباشد یعنی بازاء هیچ مقدار مجهول صفر نشود

بنابراین چون در دو طرف همچندی سازهٔ مشترکی که شامل مجهول باشد ببینیم نباید آنرا بدون دقت از بین برد بلکه باید همهٔ جمله ها را بیک طرف برده آنرا تجزیه نمود و ریشه های همچندی را بدست آورد.

مثال - مطلوبست حل همچندی $x^3 + x^2 = 4x + 4$

پس از تجزیهٔ دو طرف بحاصل ضرب سازه ها چنین میشود

$$x^2(x+1) = 4(x+1)$$

می بینیم دو طرف دارای سازهٔ مشترک $x+1$ است اگر همهٔ جمله ها را بیک طرف ببریم خواهیم داشت:

$$x^2(x+1) - 4(x+1) = 0$$

و یا پس از تجزیه $(x+1)(x^2-4) = 0$

و یا $(x+1)(x+2)(x-2) = 0$

پس ریشه های همچندی بالا عبارتند از ریشه های همچندی های

$x+1=0$ و $x+2=0$ و $x-2=0$

یعنی $x = -1$ و $x = -2$ و $x = 4$

درصورتیکه اگر دو طرف را بر سازهٔ مشترک $x + 1$ تقسیم میکردیم ریشهٔ $x = -1$ از بین میرفت.

تمرین

معادله‌های زیر را حل کنید:

$x^2 = 5x$ $\qquad$ $x^2 = 49$ $\qquad$ $x^2 = 4$

$5x^2 - 25x = 0$

$(x - 3)^2 + x - 9 = 0$

$(x - 1)^2 + (2x + 5)(x - 1) = 0$

$(3x - 2)^2 - (3x - 2)(x - 7) = 0$

$x^2 - 4 = 3x + 6$

$x^2 - ax = 5x - 5a$

$(x - a)^2 - (2x - 1)(x - a) = 0$

$(4x + 2)(x - 2n) - (x - 2n)^2 = 0$

$x^2 - a^2 - cx + ac = 0$

$y^3 - 9y = 45 - 5y^2$

$x^3 - ax^2 = 4k^2x - 4ak^2$

فصل ششم

برخه

۱۲۵- تعریف - چنانکه میدانیم بخش مقدار جبری a بر مقدار جبری b را بصورت برخه $\frac{a}{b}$ نویسند چنین برخه ایکه برخه شمار و برخه نامش عبارت جبری باشد برخه جبری نامیده میشود

مثال: $\frac{-2}{3}$, $\frac{2-x}{a-1}$, $-\frac{a+\sqrt{2}}{\sqrt{b}-x}$

نشانه برخه (که جلوی خط برخه گذارده میشود) موافق قاعده تقسیم مثبت است اگر برخه نام و برخه شمارش دارای یک نشانه باشند والا منفی است

$$\frac{-3}{5}=\frac{3}{-5}=-\frac{3}{5} \qquad \frac{-5}{-7}=\frac{+5}{+7}=+\frac{5}{7}$$

بعکس میتوان نشانه جلوی برخه را تغییر داد بشرط اینکه نشانه برخه نام یا برخه شمار تغییر نماید

مانند

$$-\frac{x-2}{x+1}=\frac{-(x-2)}{x+1}=\frac{2-x}{x+1}$$

$$-\frac{x^2+a}{ax-1}=\frac{x^2+a}{-(ax-1)}=\frac{x^2+a}{1-ax}$$

$$\frac{2x-a}{3a-x}=-\frac{a-2x}{3a-x}=-\frac{2x-a}{x-3a}$$

پرسش های ساده

نشانه جلوی هر برخه را تغییر دهید بطوریکه مقدار برخه تغییر نکند

$\frac{-2x}{a-b}$ $\qquad -\frac{x}{y}$ $\qquad \frac{-a}{x}$

$\frac{4a}{2-3x}$ $\qquad -\frac{3}{a-x}$ $\qquad \frac{a}{-x}$

$-\frac{a-x}{a^2-b^2}$ $\qquad \frac{3x-1}{2-5x}$ $\qquad -\frac{a-b}{3x-2}$

$-\frac{x^2-(1-ax)}{x^2(a-b)^2}$ $\qquad \frac{a-3}{x^2-(a^2-1)}$ $\qquad -\frac{2b-a}{2x-y+1}$

۱۲۶- بنا بتعریف تقسیم اگر بهره بر b مساوی q باشد یعنی $q=\frac{a}{b}$ خواهیم داشت

$$a=bq$$

۱۲۷- در عمل های راجع ببرخه ها همواره ازین اصل استفاده می کنیم:

هرگاه برخه شمار و برخه نام را در عبارتی مخالف صفر ضرب و یا بر عبارتی مخالف صفر تقسیم کنیم در مقدار برخه تغییری رخ نمیدهد. (از خاصیت های تقسیم شماره ۶۰)

مثلا میتوان نشانهٔ برخه نام و برخه شمار هر دو را تغییر داد و بدون آنکه تغییری در مقدار برخه پیدا شود زیرا مثل اینست که برخه نام و برخه شمار در عدد ۱- ضرب و یا بر آن تقسیم شده باشد

مثلا $\frac{3}{-4}=\frac{-3}{4}$ و $\frac{-4}{-5}=\frac{4}{5}$

و $\frac{a-x}{b-x}=\frac{x-a}{x-b}$

الف- ساده کردن برخه

۱۲۸- تبدیل برخه بساده ترین صورت - ساده ترین صورت یک برخه

برخه ایست که برخه شمار و برخه نامش نسبت بهم اول باشند یعنی این دو عبارت دارای سازه مشترک نباشند

مانند $\frac{-3}{4}$ و $\frac{x}{y}$ و $\frac{x-3}{x+4}$ و $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

و هرگاه برخه شمار و برخه نام نسبت بهم اول نباشند یعنی بر عبارتی بخش پذیر باشند میتوان بوسیلهٔ تقسیم کردن آنها بر آن عبارت برخه را ساده نمود.

مثلاً در برخه $\frac{12b^2}{-3ab}$ برخه شمار و برخه نامش دارای سازهٔ مشترک $3b$ میباشند که چون آنها را بر این سازهٔ مشترک تقسیم کنیم حاصل میشود $\frac{4b}{-a}$ این برخه ساده ترین صورت برخه بالا است و همچنین در برخه $\frac{a^2-b^2}{a^2+ab}$ برخه شمار و برخه نامش نسبت اول نیستند زیرا از تجزیهٔ هر یک معلوم میشود که دارای سازهٔ مشترک $a+b$ میباشند بنابراین

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+ab}=\frac{(a+b)(a-b)}{a(a+b)}=\frac{a-b}{a}$$

از اینجا قاعدهٔ زیر را برای تبدیل برخه بساده ترین صورت خود خواهیم داشت:

۱۲۹ - قاعده - برای تبدیل یک برخه بساده ترین صورت خود برخه شمار و برخه نام را بحاصل ضرب سازه های اول تجزیه نموده سازه های مشترک را حذف میکنیم (یعنی آنها را بر این سازهٔ مشترک تقسیم مینماییم)

چنانکه برای تبدیل برخه $\frac{a^2-(b-c)^2}{an+bn-cn}$ بساده ترین صورت خود اندر روی قاعدهٔ بالا عمل میکنیم از اینقرار:

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{an+bn-cn}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{n(a+b-c)}=\frac{a-b+c}{n}$$

۱۳۰- یادآوری- اولاً چنانکه گفتیم اگر برخه شمار و برخه نام را در عبارتی ضرب و یا بر آن تقسیم کنیم مقدار برخه تغییر نمی کند ولی اگر بر برخه شمار و برخه نام یک عبارت مخالف صفر بیفزائیم و یا از آن ها یک عبارت مخالف صفر کم کنیم مقدار برخه تغییر میکند .

چنانکه هرگاه از برخه شمار و برخه نام $\frac{5}{4}$ یک یکه کم کنیم حاصل مساوی $\frac{4}{3}$ و یا ۲ میشود که مخالف $\frac{5}{4}$ است و نیز اگر بر آنها یک یکه بیفزائیم حاصل مساوی $\frac{6}{5}$ و یا $\frac{3}{2}$ میشود که آن نیز مخالف $\frac{5}{4}$ است

همچنین برخه $\frac{1-x}{x+1}$ ساده ترین صورت را داراست زیرا برخه شمار و برخه نامش نسبت بهم اوّلند ولی اگر از برخه شمار و برخه نام x را کم کنیم مقدار برخه مساوی $\frac{1}{1}$ یا مساوی ۱- میشود که با برخه $\frac{1-x}{x+1}$ مساوی نیست زیرا این برخه بازاء مقدارهای x مقدارهای مخالف ۱- پیدا میکند .

ثانیاً باید دانست که اگر برخه شمار و برخه نام را در دو عبارت مختلف ضرب کنیم مقدار برخه تغییر میکند بخصوص اگر آنها را بتوان دوم رسانیم مقدار برخه تغییر میکند (مگر وقتی که برخه مساوی ۱+ باشد)

پرسش های ساده

۱- برخه های زیر را ساده کنید .

$$\frac{36a^3}{81ax} \qquad \frac{-60m^2}{-90m^3} \qquad \frac{10x^2}{25x^3}$$

$$\frac{3ax^2}{-36ax^2} \qquad \frac{24ax^2}{60ax} \qquad \frac{-144x^2}{120x}$$

$$\frac{-14m^3n^2}{60m^3n^3} \qquad \frac{63a^3b^2c^2}{84abc^4} \qquad \frac{a^2\sqrt{6}}{x\sqrt{2}}.$$

تمرین

هریک از برخهای زیر را بساده ترین صورت خود تبدیل کنید :

$$\frac{a^3-ab}{a^2-ab} \qquad \frac{ax-a}{b-bx} \qquad \frac{5x-5}{7-7x}$$

$$\frac{x^2-4}{(x-2)^2} \qquad \frac{x^3-4x}{(x+2)^2} \qquad \frac{6a^2-6ab}{3(b-a)^2}$$

$$\frac{x^2-x}{1-x} \qquad \frac{mx-m-x+1}{(m-1)^2}$$

$$\frac{ax+bx+cx}{ay+by+cy} \qquad \frac{ac+bc-ad-bd}{ac-bc-ad+bd}$$

$$\frac{2ac-2ad-3bc+3bd}{2ac-2ad+3bc-3bd} \qquad \frac{3x^2-3x-270}{3x^2-243}$$

$$\frac{(x-3)^2-a^2}{2x-6+2a} \qquad \frac{x^2-5x+6}{2x^2-12x+18}$$

$$\frac{6a^2b^2-3a^3b-3ab^3}{ab^2-a^2b} \qquad \frac{x^4-a^4}{x^4+3a^2x^2+2a^4}$$

ب - جمع جبری برخه ها

۱۳۱- جمع جبری برخه هائیکه دارای یک برخه نامند. - میخواهیم دو برخهٔ $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b}$ که دارای یک برخه نامند باهم جمع کنیم اگر مقدار این دو برخه بترتیب q و q' باشد خواهیم داشت

$$a = bq \qquad و \qquad a' = bq'$$

و میخواهیم حاصل جمع $q+q'$ را بدست بیاوریم برای این کار چون دو تساوی بالا را باهم جمع کنیم این تساوی بدست میآید .

$$a + a' = bq + bq'$$

و یا

$$a + a' = b(q + q')$$

حال برای تعیین $q + q'$ کافیست دو طرف این تساوی را بر b تقسیم کنیم

$$q + q' = \frac{a + a'}{b}$$

یعنی $q + q'$ یا حاصل جمع $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b}$ برخه ایست مساوی $\frac{a + a'}{b}$

که برخه شمارش مجموع برخه شمارها و برخه نامش مساوی برخه نام دو برخه مفروض باشد

بنابراین قاعده زیر را خواهیم داشت:

قاعده - مجموع جبری چند برخه که دارای یک برخه نام مند برخه ایست که برخه نامش همان برخه نام و برخه شمارش مجموع جبری برخه شمارهای آنها باشد

مانند

$$\frac{a}{x} - \frac{2a}{x} + \frac{b}{x} = \frac{a - 2a + b}{x} = \frac{-a + b}{x}$$

و

$$\frac{a - b}{12} - \frac{b - a}{12} - \frac{2a - 3b}{12} = \frac{a - b - (b - a) - (2a - 3b)}{12} = \frac{b}{12}$$

پرسش های ساده

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \qquad \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \qquad \frac{3}{7} - \frac{5}{7}$$

$$\frac{5}{12} - \frac{3}{12} \qquad \frac{1}{n} + \frac{3}{n} \qquad \frac{y}{x} - \frac{2y}{x}$$

$$\frac{x + 1}{x} - \frac{1}{x} \qquad \frac{a - 3}{x} - \frac{a}{x} \qquad \frac{a + c}{ax} - \frac{c}{ax}$$

$$\frac{a^2+x^2}{a+x} - \frac{x^2-a^2}{a+x} \qquad \frac{a-x}{3x} - \frac{a+x}{3x}$$

$$\frac{x^3-x^2}{x+1} + \frac{2x^2}{x+1} \qquad \frac{a^2-ax}{a+x} + \frac{2ax}{a+x}$$

تبصره - بعکس میتوان برخه ای را که برخه نمایش چند جمله باشد بمجموع جبری چند برخه تبدیل نمود

مثال:

$$\frac{8a-x}{12} = \frac{8a}{12} - \frac{x}{12} = \frac{2a}{3} - \frac{x}{12}$$

و

$$\frac{ax+a^2}{ax} = \frac{ax}{ax} + \frac{a^2}{ax} = 1 + \frac{a}{x}$$

۱۳۲ - جمع جبری چند برخه که برخه نماشان یکی نباشد - برای جمع چند برخه که برخه نماشان مساوی نباشد باید برخه نماهای آنها را مساوی نمود (بدون اینکه تغییری در مقدار برخه ها حاصل شود) و مانند قاعده بالا عمل کرد.

مثال - میخواهیم دو برخه $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را باهم جمع کنیم

اگر a و b هر دو را در d (برخه نام $\frac{c}{d}$) و همچنین c و d هر دو را در b (برخه نام $\frac{a}{b}$) ضرب کنیم برخه نام آنها مساوی میشود بدون اینکه تغییری در مقدار این دو برخه حاصل شود از نیقرار:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d} = \frac{ad}{bd}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{bc}{bd}$$

پس مجموع دو برخه $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ چنین میشود:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

۱۲۳ - قاعدهٔ کلی برای مساوی کردن برخه نامها. قاعدهٔ کلی این است
که برخه شمار و برخه نام هر برخه را در حاصل ضرب برخه نامهای دیگر ضرب
کنیم در این صورت برخه نام مشترک حاصل ضرب برخه نامها میشود چنانکه
اگر بخواهیم برخه های $\frac{x}{-5}$ و $\frac{-a}{2}$ و $\frac{3}{y}$ را تبدیل برخه هائی کنیم که دارای یک برخه
نام باشند موافق قاعدهٔ بالا بترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{x}{-5}=\frac{x\times 2y}{-5\times 2y}=\frac{2xy}{-10y}$$

$$\frac{-a}{2}=\frac{-a\times(-5y)}{2\times(-5y)}=\frac{5ay}{-10y}$$

$$\frac{3}{y}=\frac{3\times(-10)}{y\times(-10)}=\frac{-30}{-10y}$$

این قاعده کلی است ولی در حالتهای مخصوصی که برخه نامها دارای سازه یا سازه‌های مشترک
باشند بهتر آن است که کوچکترین مضرب برخه نامها را بجای حاصل ضرب آنها برخه نام مشترک آنها گرفت
چنانکه برای برخه نام مشترک برخه های $\frac{-5}{4x}$ و $\frac{y}{9x^2}$ و $\frac{5}{6x}$ بجای آنکه حاصل
ضرب برخه نامها را برخه نام مشترک قرار دهیم بهتر آن است که کوچکترین مضرب مشترک چون
$4x$ و $9x^2$ و $6x$ را که $36x^2$ است برخه نام مشترک بگیریم
و می بینیم که $36x^2$ مساوی حاصل ضرب $4x$ است در $9x$

« « « $9x^2$ « ۴

« « « $6x$ « $6x$

بنابراین برای تعیین برخه‌شمارهای همبرخه باید برخه‌شمار اول را در $9x$ و دومی را در
۴ و سومی را در $6x$ ضرب کنیم از اینقرار:

$$-\frac{5}{4x} = -\frac{5 \times 9x}{4x \times 9x} = -\frac{45x}{36x^2}$$

$$\frac{7}{9x^2} = \frac{7 \times 4}{9x^2 \times 4} = \frac{28}{36x^2}$$

$$\frac{a}{6x} = \frac{a \times 6x}{6x \times 6x} = \frac{6ax}{36x^2}$$

۱۳۴ - کوچکترین مضرب مشترک چند عبارت جبری - کوچکترین مضرب مشترک چند عبارت جبری ساده‌ترین عبارتیست که بر آنها بخش‌پذیر باشد و برای تعیین آن باید هر یک از عبارتهای مفروض را بحاصل ضرب سازه‌های اول تجزیه نمود - کوچکترین مضرب مشترک عبارتهای مفروض مساویست با حاصل ضرب تمام سازه‌های اول با نماهای بزرگتر.

مثال ۱ - کوچکترین مضرب مشترک mx و x^2 مساوی mx^2 است
و همچنین » » » $4nx$ و $6ax^2$ مساوی $12anx^2$ است

مثال ۲ - میخواهیم کوچکترین مضرب مشترک ax^2-9a و x^2-5x+6 و x^2-4x+4 را بگیریم
بترتیب خواهیم داشت:

$$ax^2 - 9a = a(x+3)(x-3)$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

$x^۲ - ۴x + ۴ = (x - ۲)^۲$

بنا براین کوچکترین مضرب چین این سه عبارت این است

$a(x - ۳)(x + ۳)(x - ۲)^۲$

تمرین

مطلوبست تعیین کوچکترین مضرب مشترک چین عبارتهای زیر:

a و b و $a + b$

همچنین x و ax و $a + x$

$x + ۳$ و $۲x + ۶$

$ax + a^۲$ و $x + a$

$x^۲ - n^۲$ و $n + x$

$x^۲ - ۴$ و $۶ + ۳x$ و $x - ۲$

$x - ۳$ و $x^۲ - ۹$ و $x^۲ - ۵x + ۶$

$x^۲ - ۲۵$ و $x^۲ - ۶x + ۵$ و $x + ۵$

$۴a^۲ - ۱$ و $۲a + ۱$ و a

مثال ۱ـ حاصل عبارت $x - ۳ + \frac{۵x}{۲x - ۶}$ را بدست آورید

این عبارت را میتوان چنین نوشت:

$$\frac{x - ۳}{۱} + \frac{۵x}{۲(x - ۳)}$$

که کوچکترین مضرب برخه نماها $۲(x-۳)$ است بنابراین حاصل عبارت بالا چنین است

$$\frac{۲(x-۳)^۲+۵x}{۲(x-۳)} = \frac{۲x^۲-۷x+۱۸}{۲(x-۳)}$$

مثال ۲- حاصل عبارت $\frac{x+۱}{۲x-۲} - \frac{x-۱}{۲x+۲} + \frac{۴x}{۱-x^۲}$ را بدست آورید

برخه نماها را بحاصل ضرب سازه های اول تجزیه میکنیم:

$$\frac{x+۱}{۲(x-۱)} - \frac{x-۱}{۲(x+۱)} + \frac{۴x}{(۱-x)(۱+x)}$$

که کوچکترین مضرب مشترک برخه نماها $۲(x-۱)(x+۱)$ است بنابراین حاصل عبارت بالا چنین میشود

$$\frac{(x+۱)^۲-(x-۱)^۲-۸x}{۲(x-۱)(x+۱)} = \frac{۲x}{۱-x^۲}$$

تمرین

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$\frac{x^۲+n^۲}{۲x-۲n}+۳x+n$$

$$x^۲+x+۱-\frac{x^۲+۲}{x-۱}$$

$$\frac{۳a}{۲+b}-\frac{a}{b-۲}+\frac{۱}{b^۲-۴}$$

$$x+y^۲-\frac{x^۳+y^۳}{x+y}-xy$$

$$x^۲+x-\frac{x^۴+۳x^۲+۱}{x^۲-x+۱}+۱$$

$$\frac{۲-x}{۱-۲x}-\frac{۲+x}{۱+۲x}-\frac{۱-۶x}{۴x^۲-۱}$$

$$۲a+۳-\frac{۴}{a-۲}-(a+۱-\frac{۳}{a+۴})$$

$$y-3-\frac{3y}{y+3}-\left(y+3+\frac{3y}{y+4}\right)$$

$$ax+a-\frac{a}{x+1}-\left(ax-a-\frac{x}{x-1}\right)$$

در سه مثال بالا بهتر این است که اول پرانتز را از میان برده جمله های متشابه را جمع کنیم پس از آن بجمع جبری برخه ها بپردازیم.

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

کوچکترین برخه نام مشترک را میتوان مساوی $(a-b)(b-c)(c-a)$ گرفت.

$$\frac{y+z}{(x-y)(x-z)}+\frac{x+z}{(y-z)(y-x)}+\frac{x+y}{(z-x)(z-y)}$$

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$\frac{bc}{(a-c)(a-b)}-\frac{ac}{(b-c)(a-b)}-\frac{ab}{(c-a)(b-c)}$$

ج - ضرب برخه ها

۱۳۵ - میخواهیم حاصل ضرب برخهٔ $\frac{a}{b}$ را در برخهٔ $\frac{a'}{b'}$ بدست بیاوریم.

اگر $\frac{a}{b}$ را q و $\frac{a'}{b'}$ را q' بنامیم خواهیم داشت:

$$\frac{a'}{b'}=q' \quad \text{و} \quad \frac{a}{b}=q$$

ما میخواهیم حاصل ضرب qq' را بدست آوریم. از دو تساوی بالا چنین برمیآید:

$$a=bq$$

$$a'=b'q'$$

اگر دو طرف این دو تساوی را در یکدیگر ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$aa' = bb'cc'$$

برای بدست آوردن cc' طرفین تساوی را بر bb' تقسیم میکنیم:

$$cc' = \frac{aa'}{bb'}$$

یعنی cc' که حاصل ضرب دو برخه $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ میباشد برخه ایست که برخه شمارش حاصل ضرب برخه شمارها (a و a') و برخه نامش حاصل ضرب برخه نامها: b و b' باشد.

مثال

$$\frac{2x}{x-y} \times \frac{x^2-y^2}{8} = \frac{2x(x-y)(x+y)}{8(x-y)} = \frac{x(x+y)}{4}$$

$$\frac{x^2+a^2}{x} \times \frac{x^3}{x^4-a^4} = \frac{x^3(x^2+a^2)}{x(x^4-a^4)} = \frac{x^2}{x^2-a^2}$$

۱۳۶- تبصره - چون هر عبارت درست را میتوان بشکل برخه ای نوشت که برخه شمارش همان عبارت و برخه نامش یک باشد بنابراین برای ضرب یک عبارت درست در یک برخه آن عبارت را در برخه شمار آن برخه ضرب میکنیم.

مثال:

$$-2 \times \frac{a}{x} = \frac{-2}{1} \times \frac{a}{x} = \frac{-2a}{x}$$

$$(x-1) \times \frac{2}{x+1} = \frac{2(x-1)}{x+1}$$

نتیجه ۱- هرگاه برخه شمار یک برخه در عبارتی ضرب شود مقدار آن برخه در آن عبارت ضرب میشود.

نتیجه ۲- از آنچه گذشتیم معلوم میشود که حاصل ضرب $x \cdot \frac{a}{bx}$ را میتوان $\frac{ax}{bx}$ نوشت حال اگر برخه نام و برخه شمار $\frac{ax}{bx}$ را بر x تقسیم کنیم (بفرض $x \neq 0$)

خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} \times x = \frac{ax}{b} = \frac{a}{\frac{b}{x}}$$

یعنی برای ضرب $\frac{a}{b}$ در x میتوان برخه نامش را بر x تقسیم نمود.

مثال:

$$\frac{a+x}{8x^2} \times 2x = \frac{a+x}{\frac{8x^2}{2x}} = \frac{a+x}{4x}$$

$$\frac{8}{y^2-x^2} \times (x+y) = \frac{8}{\frac{y^2-x^2}{x+y}} = \frac{8}{y-x}$$

۱۳۷ - توان یک برخه - چون توان حالت مخصوصی است از ضرب پیاپی توان m ام یک برخه برخه ایست که برخه شمارش توان m ام برخه شمار آن برخه بوده، برخه نامش توان m ام برخه نام آن باشد یعنی:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

مثال:

$$\left(\frac{a-1}{2x}\right)^2 = \frac{(a-1)^2}{4x^2}$$

$$\left(\frac{-1}{x-1}\right)^3 = \frac{-1}{(x-1)^3}$$

پرسش های ساده

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$-3 \times \left(-\frac{4}{9}\right)^2 \qquad \frac{5}{6} \times \frac{18}{25} \qquad -\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$

$$\frac{a^2}{n^2} \times \left(\frac{-2n}{a}\right) \qquad \frac{a}{2x} \times \frac{x}{a} \qquad \frac{1}{a} \times \frac{1}{x}$$

$$\frac{a^2-x^2}{a} \times \frac{a}{a+x} \qquad \frac{a^3}{n^2} \times \left(\frac{x}{a}\right)^2 \qquad -2a \times \left(\frac{-x}{a}\right)$$

$$\frac{3x+n}{nx} \times \frac{n^2x^2}{3x-n} \qquad \frac{a^2-4}{3x} \times \frac{6x}{a-2}$$

$$\left(\frac{n}{a+n}\right)^2 (a+n)^2 \qquad \left(\frac{a+x}{a}\right)^2 \times a^2$$

$$\frac{y-x}{a^2-b^2}\times\frac{a+b}{x-y}\qquad\qquad \frac{x^2-9}{3x^2}\times\frac{x}{x-3}$$

تمرین

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$\frac{5ax}{2x^3}\times\frac{6nx}{10a^2}\times\frac{x^2a}{x^3}\qquad\qquad \left(\frac{2ax}{[illegible]}\right)^2\times\frac{10x}{4a^3x}$$

$$\frac{x}{4x^2}\cdot\left(\frac{x}{2x}\right)^2\cdot 3\frac{1}{2}\qquad\qquad \frac{a}{b}\times\frac{a^2x}{x^2}\times\frac{b^3x^2}{ax}$$

$$\left(\frac{2y}{3bx}\right)^2\times\frac{12b^3}{16c^2yx^2}\times 8c^5x^2$$

$$\frac{x^4}{(2x)^3}\times\left(\frac{3a}{x}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\qquad\qquad \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{2x}{n}\right)^3\left(\frac{2n}{x}\right)^2$$

$$\frac{x+2}{x-2}\times\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}\qquad\qquad \frac{6n}{x}\cdot\left(\frac{-2x}{3n}\right)^3\left(\frac{9n^2}{4x}\right)^2$$

$$\frac{x^2-4}{x+3}\times\frac{2x+6}{3x-6}\qquad\qquad \frac{a+x}{a-x}\times\frac{a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2}$$

$$\frac{3x-12}{ax+3a}\times\frac{a^2x+3a^2}{nx-4n}\qquad\qquad \frac{x+7}{x^2-25}\times\frac{2x-15}{ax+7a}$$

$$\frac{2x^2+6}{5x^4}\times\frac{10x^3}{3x^2+9}\qquad\qquad \frac{5a+5c}{ax-cx}\times\frac{ax^2-cx^2}{a^2+ac}$$

$$\frac{x^2-16}{2x^2-18}\times\frac{x^2+x-6}{x^2+x-20}\qquad\qquad \frac{x^2-x-6}{x^2-4}\times\frac{x+2}{x-3}$$

۱۳۸ - حل معادله‌های برخه‌ئی - مثال - مطلوبست حل معادله‌ی

$$\frac{5x-1}{3x+3}-\frac{3x+2}{2(x-1)}=\frac{x^2-30x+2}{6x^2-6}\qquad(1)$$

برخهٔ طرف دوم را بطرف اول میآوریم و مجموع طرف اول را حساب میکنیم که کوچکترین برخه نام مشترک $6(x^2-1)$ است پس خواهیم داشت:

$$\frac{2(x-1)(5x-1)-3(x+1)(3x+2)-(x^2-30x+2)}{6(x^2-1)}\qquad(2)$$

یعنی بعد برخه شمار بر برخه نام ($۶(x^۲-۱)$) مساوی صفر است بنا براین لازم است (شماره ۵۳) که برخه شمار مساوی صفر باشد یعنی :

$$۲(x-۱)(۵x-۱)-۳(x+۱)(۳x+۲)-(x^۲-۲۰x+۲)=۰$$

و با پس از ساده کردن $x=۲$

تبصره - چنانکه دیده میشود پس از اینکه همچندی (۱) بصورت همچندی (۲) درآمد برای حل آن کافی است تنها برخه شمارش را مساوی صفر قرار دهیم و چون این برخه شمار از ضرب کردن دو طرف همچندی (۱) در برخه نام مشترک بدست آمده پس کافی است برای آسانی از اول (پس از ساده کردن برخه ها) دو طرف همچندی (۱) را در کوچکترین برخه نام مشترک ضرب کنیم بدون اینکه آن برخه نام مشترک را بنویسیم.

مثال - مطلوبست حل همچندی

$$\frac{۲x-۱}{۲(x-۳)}=\frac{۳(x-۲)}{۳x-۱}$$

دو طرف را در $۲(x-۳)(۳x-۱)$ که کوچکترین برخه نام مشترکست ضرب میکنیم خواهیم داشت :

$$(۲x-۱)(۳x-۱)=۳(x-۲)\cdot۲(x-۳)$$

که پس از ساده کردن جواب همچندی $x=\frac{۷}{۵}$ است

تمرین

دیا آنکه برخه نام بی اندازه بزرگتر از برخه شمار گردد که ما درین جا بدان نمیپردازیم

این همچندها را حل کنید:

$$\frac{2(3x-21)}{3(2x-4)} = \frac{14}{9}$$

$$\frac{2x^2-1}{2x-1} = \frac{x^2+1}{x+1}$$

$$\frac{x-1}{x-3} = \frac{4-x}{5-x}$$

$$\frac{4-2x}{3} - \frac{4}{6x-3} = \frac{1.5x}{x-0.5} - \frac{4x^2}{3(2x-1)}$$

$$\frac{3x-1}{2x-6} + \frac{5x-7}{3x-9} + \frac{7x+1}{4x-12} = 11$$

$$\frac{3x-5}{5x-5} + \frac{5x-1}{7x-7} + \frac{x-4}{x-1} = 2$$

$$\frac{4x^2-x}{1+x} - \frac{3x}{1-x} = \frac{4x^3+2x}{x^2-1}$$

مثال - مطلوبست حل همچندی

$$\frac{8}{x-3} - \frac{4}{x-5} = \frac{5}{x-2} - \frac{1}{x-6}$$

دو طرف را در کوچکترین مضرب برخه‌ها ضرب میکنیم حاصل میشود:

$$8(x-5)(x-2)(x-6) - 4(x-3)(x-2)(x-6) =$$

$$5(x-3)(x-5)(x-6) - (x-3)(x-5)(x-2)$$

در طرف اول $4(x-2)(x-6)$ و در طرف دوم $(x-3)(x-5)$ مشترک است بنابراین خواهیم داشت

$$4(x-2)(x-6)\left[2(x-5)-(x-3)\right] =$$

$$(x-3)(x-5)\left[5(x-6)-(x-2)\right]$$

و پس از ساده کردن

$$4(x-2)(x-6)(x-7) = 4(x-3)(x-5)(x-7)$$

طرف دوم را بطرف اول میبریم و چون چن آنها $4(x-2)$ سازهٔ مشترک است پس خواهیم داشت :

$$4(x-7)\left[(x-2)(x-6)-(x-3)(x-5)\right]=0$$

یا

$$(x-7)(x^2-8x+12-x^2+8x-15)=0$$

یا $-3(x-7)=0$ و از آنجا $x=7$

تمرین

بچندی های زیر را حل کنید :

$$\frac{9}{x-7}-\frac{5}{x-8}=\frac{9}{x-2}-\frac{5}{x+1}$$

$$\frac{2}{x-14}-\frac{5}{x-3}=\frac{2}{x-9}-\frac{5}{x-11}$$

$$\frac{5}{x-6}+\frac{4}{x-9}=\frac{8}{x-7}+\frac{1}{x-10}$$

$$\frac{7}{x-6}+\frac{3}{x-11}=\frac{9}{x-7}+\frac{1}{x-12}$$

$$\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}$$

$$\frac{z+8}{z+9}+\frac{z+4}{z+5}=\frac{z+9}{z+10}+\frac{z+3}{z+4}$$

$$\frac{a-2}{a-3}+\frac{a-3}{a-4}=\frac{a-1}{a-2}+\frac{a-4}{a-5}$$

$$\frac{y}{y-3}+\frac{9-y}{7-y}=\frac{y+1}{y-2}+\frac{8-y}{6-y}$$

$$\frac{3a-27}{a-13}+\frac{a-7}{a-8}=\frac{a-12}{a-13}+\frac{2a-17}{a-9}$$

و – تقسیم برخه ها

۱۳۹- میخواهیم بهر برخهٔ $\frac{a}{b}$ را بر برخهٔ $\frac{a'}{b'}$ بدست بیاوریم. اگر مانند پیش این دو برخه را بترتیب q و q' بنامیم میخواهیم $\frac{q}{q'}$ را بدست بیاوریم

اگر دو طرف دو تساوی $a = bq$ و $a' = b'q'$ را بر هم تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$\frac{a}{a'} = \frac{bq}{b'q'}$$

برای بدست آوردن $\frac{q}{q'}$ دو طرف تساوی بالا را در برخهٔ $\frac{b'}{b}$ ضرب بکنیم بنابراین خواهیم داشت

$$\frac{q}{q'} = \frac{ab'}{a'b} = \frac{a}{b} \times \frac{b'}{a'}$$

یعنی: بهر دو برخه مساویست با حاصل ضرب برخهٔ بخشی در وارونهٔ برخهٔ بخشیاب.

مثال:

$$\frac{2}{3x} : \frac{8}{x^2} = \frac{2}{3x} \times \frac{x^2}{8} = \frac{x}{12}$$

$$1 : \frac{a}{b} = \frac{1}{1} \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

یا

$$\frac{a}{b} : x = \frac{a}{b} : \frac{x}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{x} = \frac{a}{bx}$$

تبصره - از مثال آخر چنین برمیآید که هرگاه برخه نام در عبارتی ضرب شود مقدار آن برخه بر آن عبارت تقسیم میشود و بعکس. حال اگر در همین مثال برخه شمار و برخه نام $\frac{a}{bx}$ را بر x تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} : x = \frac{a}{bx} = \frac{\frac{a}{x}}{b}$$

یعنی: برای تقسیم کردن یک برخه بر یک عبارت میتوان برخه شمار آن برخه را بر آن عبارت تقسیم نمود.

مانند $\frac{x^۲-۱}{a} : (x+۱) = \frac{\frac{x^۲-۱}{x+۱}}{a} = \frac{x-۱}{a}$

تمرین

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$-\frac{۵}{۵۱} : \frac{۱۰}{-۱۷}$ ؛ $\frac{۲۳}{۳۹} : \frac{-۱۱۵}{۲۶}$ ؛ $-۴\frac{۱}{۵} : ۳\frac{۲}{۴}$

$\frac{۲ab}{x} : \frac{ac}{۴nx}$ ؛ $\frac{a^۲}{n} : \frac{۲a}{n^۲}$ ؛ $\left(\frac{۲an}{x}\right)^۲ : \frac{۶an^۲}{۹x^۴}$

$\frac{a}{b} : \frac{x}{n} : \frac{an^۲}{bx^۲}$

(درین مثال و مانند آن قرار میگذاریم که ابتدا خارج قسمت دو برخهٔ اول را بدست آورده پس ازآن حاصل را بر برخهٔ سوم تقسیم کنیم)

$\frac{۲an}{۴bx} : \frac{۶a^۲n}{۵bx^۲} : \frac{۱۰an^۲}{۸cx}$

$\frac{۱۵}{۴n^۲} : \frac{۵a}{۲n^۶} : \frac{(۳n^۲)^۲}{۱۲a^۲}$

$\frac{۱۲y^۳}{۱۰x^۲} : \frac{۶y}{۵x} : \frac{۴ax}{۳by^۲}$

$\frac{(۴n^۲)^۲}{۱۲} : \left(-\frac{۲}{n}\right)^۳ : \frac{(۲n)^۲}{-۶}$

$\frac{۱۰ab^۲}{-۲۱a^۳} : \frac{۵b}{۳a^۲} : -۱۴a^۴b$

$-\left(-\frac{۳a}{۲x}\right)^۲ : -\left(-\frac{۳a}{۴x^۲}\right)^۲ \cdot \left(-\frac{a}{x}\right)$

$\frac{۲۴x^۲y}{-۱۲} \cdot \left(-\frac{y}{۴x}\right)^۲ : -\frac{(۳xy)^۲}{۲a^۲}$

$\frac{(۱۰n^۲)^۲}{۲۵۶} : \left(\frac{۵n^۲}{-۴}\right)^۲ : \frac{۵n^۲}{(۸n^۴)^۲}$

$-\frac{a^۲}{x} : \left(-\frac{x}{a}\right)^۳ : \left(\frac{a}{x^۳}\right)^۲ \cdot \left(\frac{۱}{x^۲}\right)^۳$

(ص = ۲۱۰)

$$\frac{۲a-۱}{۱۵ax^۲} : \frac{۶a-۳}{۵x}$$

$$\frac{۱-x^۲}{x^۲-۱۶} : \frac{x-۱}{x^۲-۷x+۱۲}$$

$$\frac{a^۳-a^۲-۱۲a}{a^۲-۴a+۴} : \frac{۳a^۲+a^۳}{۴-a^۲}$$

۵- مثال های ترکیبی

مثال ۱- حاصل عبارت $(۳-\frac{۱}{a+۲}) : (۳-\frac{۴}{a+۳})$ رابدست آورید

اول حاصل هر پرانتز را پیدا میکنیم ازینقرار:

$$۳-\frac{۱}{a+۲} = \frac{۳a+۶-۱}{a+۲} = \frac{۳a+۵}{a+۲}$$

$$۳-\frac{۴}{a+۳} = \frac{۳a+۹-۴}{a+۳} = \frac{۳a+۵}{a+۳}$$

پس ازآن این دو حاصل را برهم تقسیم مینمائیم:

$$\frac{۳a+۵}{a+۲} : \frac{۳a+۵}{a+۳} = \frac{۳a+۵}{a+۲} \times \frac{a+۳}{۳a+۵} = \frac{a+۳}{a+۲}$$

تمرین

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$(x+\frac{a^۲}{a+x}) : (\frac{۲ax+x^۲}{a+x}-a)$$

$$(x-۳-\frac{۲۸}{x}) : (۱-\frac{۱}{x}-\frac{۲۰}{x^۲})$$

$$(a-\frac{۳}{۲a}+۱) : \frac{۲a+۳}{۲a+۱}(\frac{۳}{۴a^۲-۱}+۲)$$

$$\frac{۲x-۶}{x+۲} : (۲+\frac{۱۶x}{۴x^۲-۱۶})(\frac{۷}{x-۳}+۲)$$

$$\left[\left(\frac{a}{n}-\frac{n}{a}\right):\frac{a+n}{۲a^{۲}-۲an}\right]\cdot\frac{nx}{۲(a-n)^{۲}}$$

$$\frac{۹n^{۲}+۹n}{۹n^{۲}-۴}:\frac{n+۱}{۳n-۲}\left(۳n+۴+\frac{۴}{۳n}\right)$$

$$\frac{۴-۴n^{۴}}{۴n^{۴}-۲۵n^{۲}}:\frac{۲n^{۲}+۲}{۲n-۵}\left(۲n^{۲}+\frac{۸n^{۲}-n^{۳}}{n-۱}\right)$$

$$(۳n^{۳}-۷۵n):\left(۲+\frac{۱۱}{n}+\frac{۵}{n^{۲}}\right)\left(۶n-۱۱-\frac{۱۰}{n}\right)$$

$$\left(\frac{-۶a}{a^{۲}-۴}+\frac{۳}{۲-a}\right):\frac{۳}{a^{۲}-a-۶}$$

$$\left(۴-\frac{۶}{a+۱}\right):\left(۸-\frac{۴a-۸}{a^{۲}-۱}\right)$$

$$\left(\frac{۲x}{x-۲}-\frac{x}{x-۱}\right):\left(\frac{۳x}{x-۳}-\frac{۲x}{x-۲}\right)$$

$$\left(\frac{۸}{m-x}-\frac{۴}{x^{۲}-m^{۲}}\right):\left(\frac{۱}{m-x}-\frac{۱}{m+x}\right)$$

مثال ۲ - عبارت

$$\frac{\dfrac{a^{۲}+b^{۲}}{a^{۲}-b^{۲}}-\dfrac{a^{۲}-b^{۲}}{a^{۲}+b^{۲}}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$$

ساده کنید

از تقسیم حاصل $\left(\frac{a^{۲}+b^{۲}}{a^{۲}-b^{۲}}-\frac{a^{۲}-b^{۲}}{a^{۲}+b^{۲}}\right)$ بر حاصل $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)$ نتیجه بدست میآید.

و نیز میتوان برای سادگی در عمل برخه شمار و برخه نام عبارت بالا را در کوچکترین مضرب برخه نامهای جزء که مساوی $(a^{۲}-b^{۲})(a^{۲}+b^{۲})$ است ضرب نمود تا چنین شود:

$$\frac{(a^{۲}+b^{۲})^{۲}-(a^{۲}-b^{۲})^{۲}}{(a+b)^{۲}(a^{۲}+b^{۲})-(a-b)^{۲}(a^{۲}+b^{۲})}$$

که پس از تجزیه بحاصل ضرب سازه ها و بنا بر شماره ۱۱۳ چنین میشود

$$\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)\left[(a+b)^2-(a-b)^2\right]}$$

و یا

$$\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)\cdot 4ab}=\frac{ab}{a^2+b^2}$$

یعنی عبارت داده شده متحد است با $\frac{ab}{a^2+b^2}$

مثال ۲ - حاصل این عبارت را بدست آورید

$$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}}$$

برخه شمار و برخه نام این برخه را در xy کوچکترین مضرب برخه نامهای جزء ضرب میکنیم

بنا بر این خواهیم داشت :

$$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}}=\frac{x^2-y^2}{y\sqrt{x}-x\sqrt{y}}$$

تمرین

۱- حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید :

$$\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{5}}\qquad\qquad \frac{\frac{7}{3}-1}{\frac{2}{3}+1}$$

$$\frac{\frac{6}{x}-5+x}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}-\frac{6}{x^2}}\qquad\qquad \frac{\frac{5}{6}+\frac{3}{41}+\frac{1}{2}}{\frac{11}{12}-\frac{7}{4}-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}\qquad\qquad \frac{x-3-\frac{30}{x-2}}{x-1-\frac{20}{x-2}}$$

$$\frac{۱}{۴-\frac{۲}{x+\frac{x}{۱-x}}}$$

$$\frac{۱-\frac{a^{۳}}{b^{۳}}}{\frac{۱}{b^{۲}}-\frac{a}{b^{۳}}}$$

$$۱-\frac{۱}{۱+\frac{۱}{a}}$$

$$۳+\frac{۱}{۵+\frac{۱}{۶+\frac{۱}{۳}}}$$

$$x-\frac{y}{۱+\frac{۱}{۱+\frac{y}{x}}}$$

$$a-\frac{a-۲b}{۲-\frac{a+b}{a-b}}$$

$$\frac{\frac{۲}{b+c}-\frac{۱}{b}}{c+\frac{bc}{c-۲b}}+\frac{\frac{۲}{b+c}-\frac{۱}{c}}{b+\frac{bc}{b-۲c}}$$

$$\frac{\frac{۲yz}{y+z}-y}{\frac{۱}{z}+\frac{۱}{y-۲z}}+\frac{\frac{۲yz}{y+z}-z}{\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z-۲y}}$$

$$\frac{x^{۳}+y^{۳}}{y-\frac{x}{۱+\frac{x}{y-x}}}-\frac{y^{۳}-x^{۳}}{y+\frac{x}{۱-\frac{x}{x+y}}}$$

$$\frac{a+۲-\frac{۱}{a+۲}}{a+۲-\frac{۴}{a+۵}}:\frac{a+۴-\frac{۱}{a+۴}}{a+۴+\frac{۱}{a+۴}}$$

$$\left(\frac{۵+۲\sqrt{۳}}{۴-\sqrt{۳}}\right)^{۲}\cdot\left(\frac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱}\right)^{۲}$$

$$\frac{m^2n - mn^2}{a^2b - ab^2} : \frac{m^3n^2 - m^2n^3}{a^3b^2 - a^2b^3}$$

$$\frac{\left(3a + 4 - \frac{4}{3a}\right)\frac{3a-2}{a-1}}{\frac{9a^2-4}{9a^2+9a}}$$

$$\frac{1 + \frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}}{1 - \frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}}$$

$$\frac{\frac{x}{1+\frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x+1}}{\frac{x}{1-\frac{1}{x}} - x - \frac{1}{x-1}}$$

$$\left(\frac{\frac{x}{y}+2}{\frac{x}{y}+1} + \frac{x}{y}\right) : \left(\frac{x}{y} + 2 - \frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+1}\right)$$

$$\frac{\frac{1-b}{1+b} - \frac{1-a}{1+a}}{1 + \frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}} : \frac{1+ab}{a-b}$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{x - \frac{1}{x}} : \frac{1}{1+x}$$

$$\left(2 - \frac{3n}{m} + \frac{9n^2-4m^2}{m^2+2mn}\right) : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m-2n-\frac{4n^2}{m+n}}\right)$$

۲- مقیاس نقشه‌ای $\frac{1}{80000}$ است یعنی هر ۸۰ کیلومتر در نقشه یک متر نمایش داده میشود حال اگر فاصله دو شهر ه کیلومتر باشد در این نقشه چقدر فاصله خواهند داشت؟ و بالعکس اگر فاصله دو شهر در این نقشه ب میلی‌متر باشد حقیقةً فاصله این دو شهر چقدر است؟ (حالت مخصوص ه = ۱۶۰ و ب = ۵۰)

۳- $\frac{۲}{۳}$ پارچه‌ای ه ریال ارزش دارد تعیین کنید ارزش $\frac{۵}{۸}$ آنرا (حالت مخصوص ه = ۱۲۰)

۴- دو کارگر کاری را در ه روز انجام میدهند اولی به تنهائی آنرا در ب روز تمام میکند معلوم کنید کارگر دوم به تنهائی در یک روز چقدر کار را تمام میکند؟ (حالت مخصوص ه = ۱۲ و ب = ۱۸)

۵- فاصله دو شهر ه کیلومتر است ترنی این فاصله را با تندی متوسط ۴۵ کیلومتر در ساعت می‌پیماید اگر فرض کنیم ماشین در دوراهی بین دو شهر مدت نیم ساعت توقف کند پس از چه مدتی از شهر اول بشهر دوم میرسد؟

۶- تندی متوسط ماشینی در پیمودن راهی ه کیلومتر در ساعت است یک قسمت این راه را با تندی ب کیلومتر در ساعت پیموده حساب کنید تندی ماشین را در بقیه راه.

۷- یک دسته هواپیما باید در ساعت ۱۷ بر فراز شهری که بفاصله ه کیلومتر است آشکار شوند اگر تندی متوسط آنها ب کیلومتر در ساعت باشد چه ساعتی باید حرکت کنند؟ (حالت مخصوص ه = ۷۰۰

۸ - در مسئله پیش فرض میکنیم $a = ۶۰۰$ کیلومتر و $b = ۲۰۰$ کیلومتر در ساعت باشد اگر هوا منقلب بوده و باد مخالفی به تندی ۲ کیلومتر در ساعت بوزد چند دقیقه زودتر باید حرکت کنند تا در موقع مقرر بشهر منظور برسند؟

۹ - شخصی a ریال بدهکار است $\frac{1}{4}$ بدهی خود را میپردازد و پس از مدتی مجبور میشود که مبلغی مساوی $\frac{1}{5}$ آنچه که بدهکار است قرض کند معلوم کنید بدهی او چه مبلغ میشود و در نتیجه این دو عمل چه مبلغی از بدهی خود را ادا کرده است؟ (حالت مخصوص $a = ۱۵۰$)

۱۰ - بنائی میتواند بتنهائی کار اطاقی را a روزه بسازد بنای دیگر بتنهائی همان کار را b روزه تحویل میدهد پس از اینکه بنای دوم یک روز کار کرد هر دو با هم کار را دنبال میکنند ساختمان کار را چند روزه تمام میشود؟ (حالت مخصوص $a = ۴$ و $b = ۶$)

۱۱ - بنا بدستور مهندس ساختمان a متر مکعب مخلوط ماسه و سیمان بنسبت $\frac{1}{3}$ تهیه شده (یعنی در سه قسمت مخلوط یک قسمت سیمان و دو قسمت ماسه میباشد) اتفاقاً مهندس تغییر رای داده میخواهد نسبت $\frac{1}{5}$ باشد چه مقدار ماسه باید به مخلوط افزوده شود؟ (حالت مخصوص $a = ۲$)

۱۲ - در ایستگاه بنزین فروشی برای پر کردن مخزن بنزین دو دستگاه لوله موجود است اولی مخزن را بتنهائی در سه ربع ساعت پر میکند و برای مواقع عادی است دومی آنرا در یکساعت و ربع پر میکند و در روزهای مخصوص که ضرورت بنزین زیاد است میخواهند هر دو دستگاه را بکار برند معلوم کنید پر کردن مخزن چه اندازه طول خواهد کشید؟

خط محمد [illegible]